

軸方向の従動力を受けた浮遊自由梁の不安定横振動

有末宏明*

Unstable Transverse Oscillation of a Free Beam
subjected to the Follower Force along the Longitudinal Axis

Hiroaki ARISUE*

要旨

無重力空間に浮遊する両端自由な梁の一端に軸方向に大きさ一定の力(従動力)を加え続けたときの梁の横方向の振動について調べた。

まず梁の横方向の運動方程式を導き、それを解いた結果、従動力が梁の曲げ剛性と長さで決まる特定の値(臨界値)に近づくにつれて最小固有振動数と2番目の固有振動数が接近し従動力の臨界値で一致した。従動力を臨界値以上に大きくすると、固有振動数は複素数となり、これは横方向の振動の振幅が時間の経過とともに指数関数的に増大することを表している。

実際、現実的な初期条件の下では、従動力が小さいときは梁の横振動の振幅は初期変位の大きさからほとんど変わらないが、従動力がその臨界値に近づくにつれて、梁の振動にはうなりの現象が見られるようになる。このうなりの振幅と周期は従動力とその臨界値の差の平方根に反比例して大きくなる。従動力が臨界値に近づく極限では、うなりの振幅と周期が無限に大きくなる結果、梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続ける現象として表れる。また、従動力が臨界値を超えてかつ臨界値に近いときは、従動力とその臨界値の差の平方根に反比例するある時間までは、梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続け、その時間を超えると振動の振幅は時間とともに指数関数的に増加する。その指数関数的増加率は従動力とその臨界値の差の平方根に比例して大きくなる。

キーワード: 自由梁, 従動力, 一様な縦長構造物, 運動方程式, 初期条件, うなり, 不安定振動

1. はじめに

片持ち梁の軸方向に常に一定の大きさの力(従動力)を加え続けたときの梁の横方向の振動について、変位が梁の長さに比べて十分小さいときに成り立つ線形の運動方程式は、その厳密解が知られている [1][2]。その振動の固有振動数は、従動力を大きくするにつれて最小固有振動数と2番目の固有振動数が互いに接近し、従動力の特定の値(臨界値と呼ぶ)において、2つの振動数が一致する。さらに従動力をこの臨界値よりも大きくすると、2つの固有振動数は今度は複素数値をとるようになる。固有振動数が虚部を持つということは、初期波形からの振動の振幅は(初期値がいくら小さくても)指数関数的に増大することを意味する。

さらに片持ち梁の軸方向に常に一定の大きさの力を加えたときの横方向の振動に関する最近の著者の論文 [3]

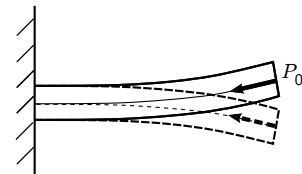


図1 軸方向に従動力を受ける片持ち梁

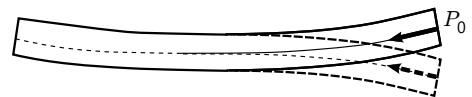


図2 軸方向に従動力を受ける浮遊自由梁

においては、梁の横方向の初期波形として現実的な波形を設定したとき、その後の横振動について以下の現象が起こることが示されている。

(i) 従動力を臨界値に下から近づけると、振動の振幅が時間的に変動するいわゆる「うなり」の現象が生じる。うなりの振幅と周期は従動力を臨界値に近づけるほど大きくなる。従動力を臨界値に近づける極限で、振動の振

2023年9月1日 受理

* 総合工学システム学科 一般科目

(Dept. of Industrial Systems Engineering : Liberal Arts)

幅は時間とともに直線的に増大する。

(ii) 従動力を臨界値を超えた値にすると、従動力とその臨界値の差の平方根に反比例するある時間までは、梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続け、その時間を超えると振動の振幅は時間とともに指数関数的に増加する。その指数増加率は従動力とその臨界値の差の平方根に比例して大きくなる。従動力が臨界値を超えても、臨界値に極めて近い範囲の値の場合は、振動の振幅が指数関数的に増加するようになるまでの時間が極めて長くなるので、それまでは梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続ける。

片持ち梁についての上記の知見を踏まえて、本研究では、図 2 のように無重力空間に浮遊する両端自由な梁の一端に軸方向に一定の力(従動力)を加え続けたときの横方向のたわみ振動について調べる。片持ち梁では、梁の一端が壁に固定され他端に軸方向の従動力を加えたのであるが、この壁を取り払って梁を自由に運動させたときに、横方向のたわみ振動について、片持ち梁の場合と同じ現象が起こるのかどうかを調べるということである。

なお、ここでは梁を対象にしているが、本研究の結果は一般に長さ方向に一樣な縦長構造物であればどのようなものにも当てはまる。具体的に想定されるのは縦長構造物の宇宙ステーションである。そのような宇宙ステーションの後端に軸方向に固定してロケットエンジンが取り付けられており、そのエンジンを一定の出力で噴射させたとき、始状態において横方向にわずかなたわみがあるとして、そのたわみの振動がその後どう振る舞うかである。

本研究ではまず、軸方向に従動力を受ける浮遊自由梁の横方向の変位が梁の長さ比べて十分小さいとして、横変位について線形の運動方程式を導いた。その運動方程式の解析的な厳密解は知られていないので、数値的に解いて、たわみ振動の固有振動数を振動波形を求めた。その結果、固有振動数は、軸方向の従動力を大きくするにつれて、最低固有振動数と 2 番目の固有振動数が互いに接近し、従動力の特定の値(臨界値と呼ぶ)において、2 つの振動数が一致する。(臨界値の値は、片持ち梁の場合の臨界値と比べて 5 倍程度の大きさである。) さらに従動力をこの臨界値よりも大きくすると、2 つの固有振動数は複素数値をとるようになることが分かった。これは最初に紹介した軸方向の従動力を受けた片持ち梁の場合と同じ現象である。そして、初期のたわみとして現実的な波形から始めた場合のその後のたわみ振動の振幅の時間的変化は、従動力が臨界値以下のときも臨界値以上のときもそれぞれ、片持ち梁の場合のたわみ振動の振幅の時間的変化の特徴 (i) と (ii) が完全に当てはまることが分かった。

2. 軸方向に従動力を受ける浮遊自由梁の横たわみ振動の運動方程式

真っすぐな棒あるいは梁等の、縦長構造物が無重力空間に支持無しで浮遊しているとする。構造物の材質と断面形状は長さ方向に一樣とし、長さは L 、密度 ρ 、断面積 A とする。この構造物の端点に一定の大きさ $P_0 (> 0)$ の力(推力)が軸線方向に従動力として(軸線の接線方向に)働いているときの長さ方向と垂直な方向の微小横振動について考察する。以下ではこの一樣縦長構造物を簡単のため梁と記述する。

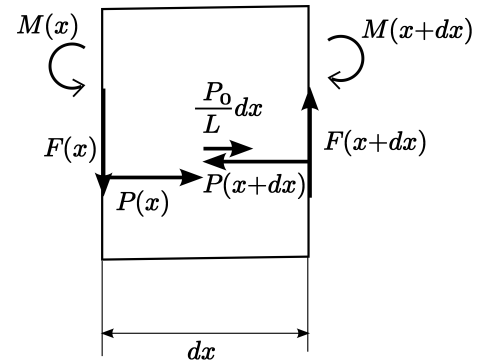


図 3 軸方向に従動力を受ける浮遊自由梁の力学

この梁の軸線方向に x 軸をとり、それと垂直なたわみ方向に y 軸をとる。大きさ P_0 の推力は梁の右端において左方向に働いているとする。この推力のために梁の重心は x 軸方向に加速度

$$a = -\frac{P_0}{\rho AL} \quad (1)$$

の等加速度運動をする。

以下では x 方向について梁の重心静止系で考察する。梁の左端を $x = 0$ 、右端を $x = L$ とする。重心静止系では、梁の各点に働く x 軸方向の応力 $P(x)$ は以下のとおりとなる。梁の幅 dx (質量 $dm = \rho A dx$) の部分には x 軸方向に慣性力 $-a dm = -\frac{P_0}{L} dx$ が働くので、その部分の両側から働く応力との釣り合い

$$\frac{P_0}{L} dx + P(x) = P(x + dx) \quad (2)$$

から、 $P(x)$ は以下の微分方程式を満たす。

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_0}{L} \quad (3)$$

境界条件 $P(0) = 0$, $P(L) = P_0$ より、以下が得られる。

$$P(x) = \frac{x}{L} P_0 \quad (4)$$

さて x 軸と垂直な方向 (y 軸方向) の梁の変位(たわみ)を $u(x, t)$ とおく。 $u(x, t)$ についての運動方程式は以下

のようにして得られる。まず、横断面内の曲げモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

ここで I は梁の断面 2 次モーメント、 EI は梁の曲げ剛性である（一般の一様縦長構造物の場合は等価曲げ剛性）。また、横振動が十分小さいときには回転運動が無視できるので、幅 dx の部分についての力のモーメントの釣り合いより、せん断力 $F(x)$ は曲げモーメント $M(x)$ と以下の関係にある。

$$F(x) = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (6)$$

x 軸と垂直な方向の運動方程式は以下のとおりとなる。

$$\rho A dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(P(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial F}{\partial x} dx \quad (7)$$

式 (7) の右辺の第 1 項は幅 dx の部分の右側と左側の応力の y 軸方向成分の差、第 2 項は同じく右側と左側のせん断力の差である。式 (7) に式 (4), (5), (6) を代入して、 $u(x, t)$ について以下の運動方程式を得る。

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{P_0}{L} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

3. 固有振動数

梁の長さ L と $\tau \equiv L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ で定義される時間 τ をそれぞれ長さと同様の単位となるように、無次元量の座標 $x' = \frac{x}{L}$ と無次元量の時間 $t' = \frac{t}{\tau}$ を導入して長さと同様の無次元化を行った後、式表記の簡便さの目的であらためて t' を t 、 x' を x と表すことにすると、横振動の運動方程式 (8) は以下のようになる。

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2p \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

ここで推力 (= 従動力) P_0 の代わりに無次元量 $p = \frac{L^2}{2EI} P_0$ を導入した。無次元化した x では梁の左端は $x = 0$ 、右端は $x = 1$ である。

この方程式 (9) の解で、

$$u(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \phi) \quad (\omega, \phi \text{ は定数}) \quad (10)$$

の形の固有振動解を探すことにする。（本研究では、式 (10) の初期位相が $\phi = 0$ の場合に限って考察する。この解は以下の初期条件を満たす。

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (11)$$

波形 $f(x)$ は以下を満たさなければならない。

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + 2p \frac{d}{dx} \left(x \frac{df}{dx} \right) - \omega^2 f = 0 \quad (12)$$

境界条件は、両端自由に対応して、以下のようになる。

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=0} = 0 \quad (13)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=1} = 0 \quad (14)$$

微分方程式 (12) の解は ($p = 0$ の場合を除いて) 初等関数で表すことができないので、数値計算により求める必要がある。ここでは Runge-Kutta 法を用いた。

推力 (従動力) p (≥ 0) の一連の値に対して、微分方程式 (12) と境界条件 (13)(14) を満たす解が存在する ω の一連の値 (固有値) とそれに対応する $f(x)$ の波形 (固有波形) を数値的に求めた。

結果は以下のとおりである。図 4, 図 5 のように、 $p_c = 54.844596$ として、 $p < p_c$ では、一連の実数値の固有振動数 (値が小さい順に $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$) が存在する。 p が p_c に近づくとつれて小さい方から 2 つの固有振動数 ω_1 と ω_2 が接近してゆき、 $p = p_c$ で両者は一致する。 $p = p_c$ で一致した振動数 ω の値は $\omega_c = 23.073329$ (臨界振動数) である。

他方、 $p > p_c$ では、 $p \leq p_c$ での ω_1, ω_2 に接続する固有振動数 ω は図 4, 図 5 に見るとおり、複素数となる。この複素固有振動数を $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$ と記す。 $p \leq p_c$ での ω_n ($n \geq 3$) に接続する固有振動数は実数値のままの値が存在する。

固有振動数が複素数の場合には、

$$f(x) = g(x) + ih(x) \quad (g(x), h(x) : \text{real}) \quad (15)$$

とおくと $g(x)$ と $h(x)$ は以下の連立方程式

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^4}{dx^4} + 2p \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) - (\omega_{\text{Re}}^2 - \omega_{\text{Im}}^2) \right\} g(x) \\ + 2\omega_{\text{Re}} \omega_{\text{Im}} h(x) = 0 \\ \left\{ \frac{d^4}{dx^4} + 2p \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) - (\omega_{\text{Re}}^2 - \omega_{\text{Im}}^2) \right\} h(x) \\ - 2\omega_{\text{Re}} \omega_{\text{Im}} g(x) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

および式 (13) と (14) でそれぞれ $f(x)$ を $g(x)$ および $h(x)$ で置き換えた境界条件を満たさなければならない。なお、 $\{g(x), h(x)\}$ が解であれば、 $\{-h(x), g(x)\}$ も解である。したがって、独立な 2 つの解を求めるためにこの自由度を用いることができる。例えば 端点 $x = 0$ での $g(x)$ と $h(x)$ の比を任意の値に設定して解き、得られた解 $\{g(x), h(x)\}$ について、 $\{-h(x), g(x)\}$ は自動的に $\{g(x), h(x)\}$ と独立な解となっている。

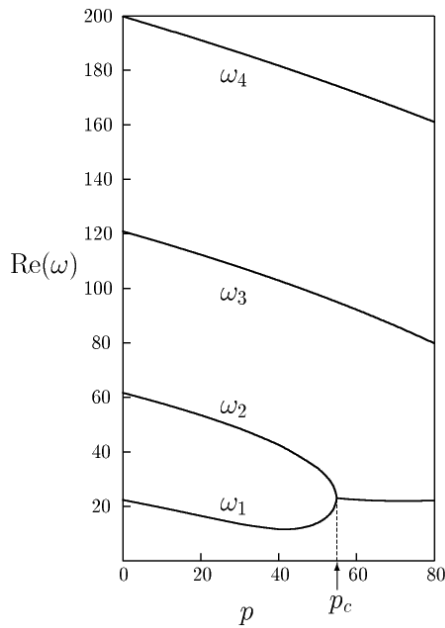


図 4 固有振動数 ω の実部

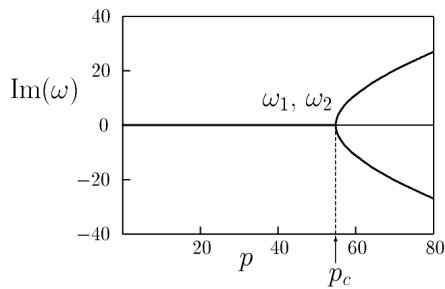


図 5 固有振動数 ω の虚部

振動数 ω の二つの固有値が一致する $p = p_c$ の近傍では一般的な考察から、二つの固有値は、 $p < p_c$ の場合と $p > p_c$ の場合で共通に以下の振る舞いをする [3].

$$\omega = \omega_c \pm k\sqrt{p_c - p} \quad (k \text{ は定数}) \quad (17)$$

今回の場合の図 4, 図 5 に対応する k の値は $k = 4.78206$ である.

4. $p < p_c$ における固有波形と振動の解析

さて、初期条件を

$$u(x, 0) = q(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (18)$$

として、その後の梁の横方向の変位 $u(x, t)$ の時間的変化を、本節で $p < p_c$ の場合について、次節で $p > p_c$ の場合について、分けて考察する. 初期波形 $q(x)$ については例として共通に以下の波形を採用する.

$$q(x) = q_0 \left\{ 6 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right\} \quad (19)$$

定数 q_0 は微小振動に対応して十分小さい定数を想定しているが、梁の横振動の運動方程式が変位について線形

方程式なので、ここでは考察の利便性のために $q_0 = 1$ とする.

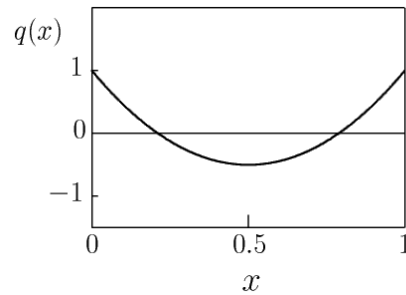


図 6 初期波形 $q(x)$

本節で議論する $p < p_c$ の場合は、固有振動数 $\omega_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ がすべて実数である. それに対応する式 (10) の $f(x)$ の波形を固有波形 $f_n(x)$ と呼ぶことにする. $f_n(x)$ は以下のように正規化 (規格化) されているものとする.

$$\int_0^1 \{f_n(x)\}^2 dx = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

固有波形 $f_n(x)$ を、 $p = 0$ と $p = 0.9p_c$ について、それぞれ図 7, 図 8 に示す.

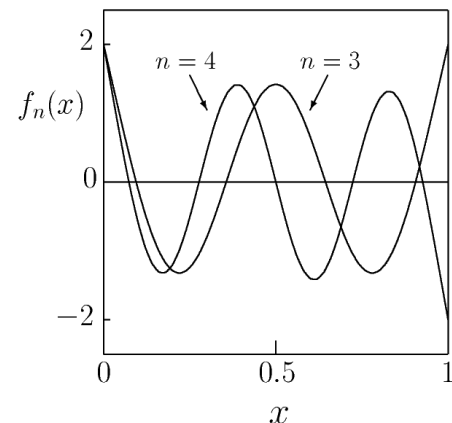
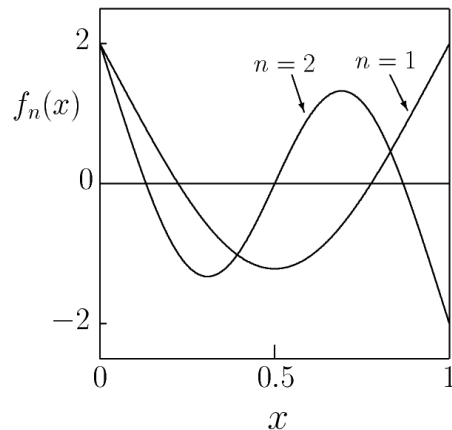


図 7 固有波形 $f_n(x)$ ($p = 0$)

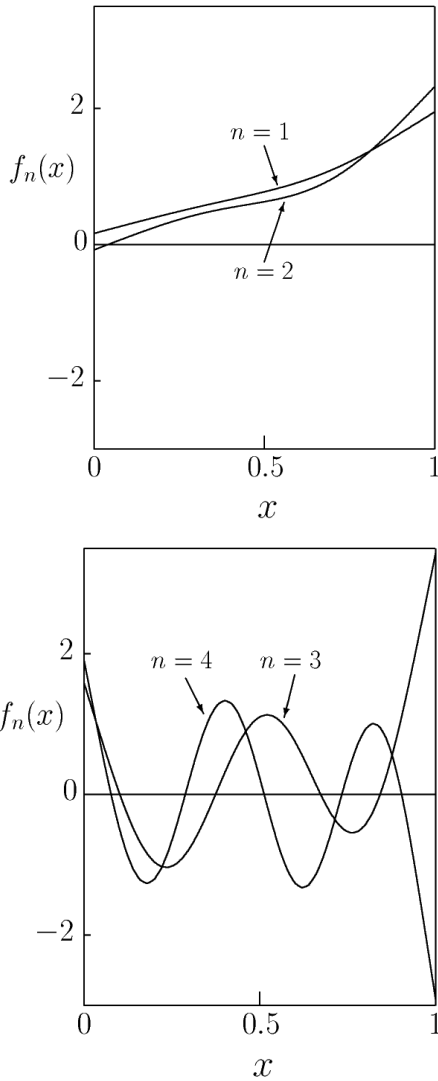


図 8 固有波形 $f_n(x)$ ($p = 0.99p_c$)

初期波形 $q(x)$ を固有波形列 $\{f_n(x)\}$ で

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (21)$$

と展開することができれば、その後の時刻 t における変位は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \cos(\omega_n t) \quad (22)$$

で与えられる。すなわち初期波形における各固有振動の成分を振幅とする単振動の重ね合わせである。

$p = 0$ の場合には、波形列 $\{f_n(x)\}$ が正規直交関数列を成すことから、展開係数 a_n は以下のように得られる。

$$a_n = \int_0^1 f_n(x) q(x) dx \quad (23)$$

展開係数 a_n は表 1 のとおり、 $|a_1| \gg |a_2|, |a_3|, \dots$ となっており、これに対応して振動の様子は図 9 のように

$n = 1$ の最低振動数の単振動が主要項であり、そこに高い振動数の成分による微小な揺らぎが加わっている。

表 1 展開係数 a_n ($p = 0$)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0.4456	0	0.0361	0	0.0093

ここで、振動の様子を見るために、各時刻における「梁のたわみの度合い」を表す指標として

$$\tilde{u}(t) \equiv \frac{\{u(x=0, t) + u(x=1, t)\}}{2} - u(x=0.5, t) \quad (24)$$

を定義する。その時間的振動の様子を図 9 に示した。

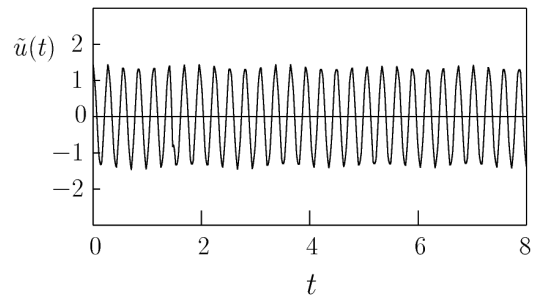
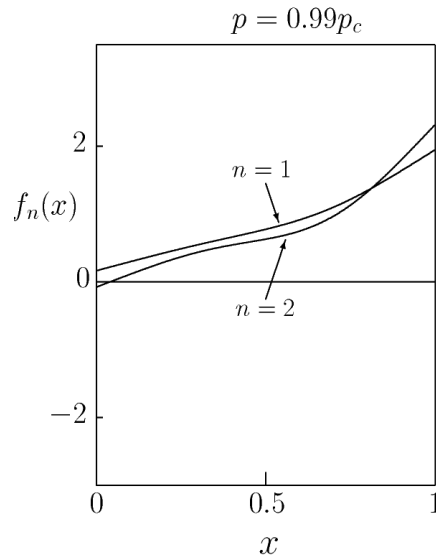


図 9 振動の様子 $\tilde{u}(t)$ ($p = 0$)

これに対して $p \neq 0$ ($< p_c$) の場合は、波形列 $\{f_n(x)\}$ は直交関数系を成さないので (文献 [3] 参照)、まず、Schmit の直交化法を用いて、固有関数列 $\{f_n(x)\}$ の線形結合により正規直交関数列 $\{\tilde{f}_n(x)\}$ を構成し、それを用いて $q(x)$ を展開することで、固有関数列 $\{f_n(x)\}$ による $q(x)$ の正確な展開 (21) を得る事ができる。

さて、前節で見たように、推進力 p が p_c に近づくとつれて、固有振動数 ω_1 と ω_2 が接近する。その結果、図 10 に示すとおり、対応する固有波形 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ も波形が近づいてゆく。



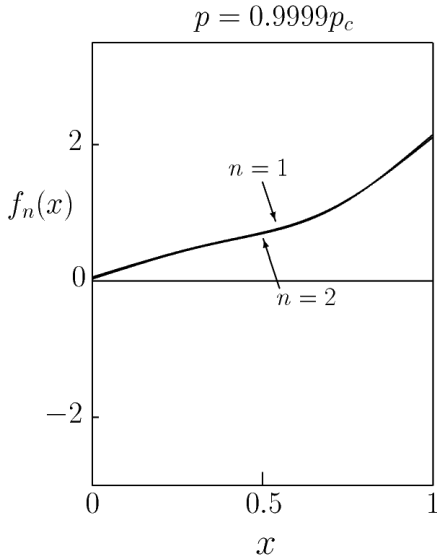


図 10 固有波形 $f_1(x)$ および $f_2(x)$

この場合には、固有波形 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の代わりに

$$f_-(x) = N_- \{f_1(x) - f_2(x)\}, \quad f_+(x) = N_+ \{f_1(x) + f_2(x)\} \quad (25)$$

を用いる方が便利である。ここで N_- , N_+ はそれぞれ $f_-(x)$ と $f_+(x)$ を正規化 (規格化) するための定数である。

$$\int_0^1 \{f_-(x)\}^2 dx = 1, \quad \int_0^1 \{f_+(x)\}^2 dx = 1 \quad (26)$$

表 2 にこの正規化定数の p による変化の様子を示す。重要な特徴は、 p が p_c に近づくとつれて、 N_- が $\sqrt{p_c - p}$ に反比例して (すなわち $\omega_2 - \omega_1$ に反比例して) 大きくなっていることである。これは、 p が p_c に近づくとつれて、 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ が近づいてゆくことの結果である。他方、 N_+ はほとんど一定である。

表 2 正規化定数 N_- および N_+

p	N_-	N_+
$0.99p_c$	6.28	0.502
$0.999p_c$	19.78	0.500
$0.9999p_c$	62.53	0.500
$0.99999p_c$	197.73	0.500

$f_-(x)$ と $f_+(x)$ を用いれば、初期波形 $q(x)$ は

$$q(x) = a_- f_-(x) + a_+ f_+(x) + \sum_{n=3}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (27)$$

と展開できて、その後の変位は以下で与えられる。

$$u(x, t) = a_- N_- \{f_1(x) \cos(\omega_1 t) - f_2(x) \cos(\omega_2 t)\} + a_+ N_+ \{f_1(x) \cos(\omega_1 t) + f_2(x) \cos(\omega_2 t)\} + \sum_{n=3}^{\infty} a_n f_n(x) \cos(\omega_n t) \quad (28)$$

$f_-(x)$ と $f_+(x)$ は定義 (25) より互いに直交する。図 11 に $p = 0.99p_c$ での $f_-(x)$ と $f_+(x)$ の波形を示す。 $f_-(x)$ と $f_+(x)$ の波形は $0.9p_c \lesssim p < p_c$ の範囲でほとんど変わらない。

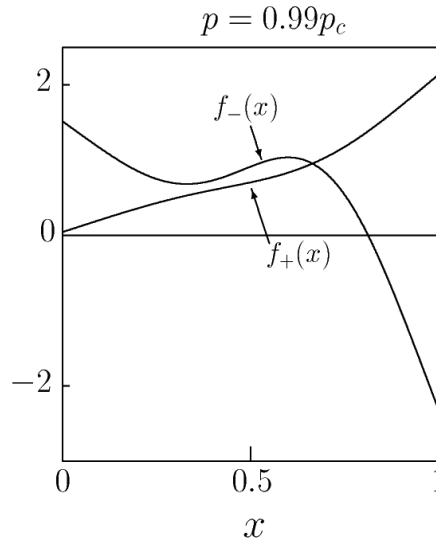


図 11 固有波形 $f_-(x)$ および $f_+(x)$

$f_-(x)$ と $f_+(x)$ はノード (ゼロ点) の数が 0 または 1 で、 $\{f_n(x)\}$ ($n = 3, 4, \dots$) はノードの数が $(n + 1)$ なので、 $f_-(x)$ と $f_+(x)$ は $\{f_n(x)\}$ ($n = 3, 4, \dots$) とほぼ直交することが期待される。したがって、展開係数 a_- と a_+ は十分良い近似で以下の式で与えられる。

$$a_- = \int_0^1 f_-(x) q(x) dx, \quad a_+ = \int_0^1 f_+(x) q(x) dx \quad (29)$$

展開係数 a_- と a_+ の積分結果、および式 (28) の係数 $a_- N_-$ と $a_+ N_+$ を表 3 に示す。 p が p_c に近づくと、 $0.9p_c \lesssim p < p_c$ の範囲では、 $a_- N_-$ は大きく、しかも $\sqrt{p_c - p}$ に反比例して増大しているが、 $a_+ N_+$ はほぼ一定で小さい。

表 3 展開係数 a_- , a_+ および $a_- N_-$, $a_+ N_+$

p	a_-	a_+	$a_- N_-$	$a_+ N_+$
$0.9p_c$	-0.18	0.06	-0.38	0.031
$0.99p_c$	-0.18	0.05	-1.13	0.027
$0.999p_c$	-0.18	0.05	-3.61	0.026
$0.9999p_c$	-0.18	0.05	-11.43	0.026
$0.99999p_c$	-0.18	0.05	-36.15	0.026

したがって、その範囲の p の値では、 $u(x, t)$ の主要項は式 (28) の第 1 項

$$u(x, t)_{\text{main}} = a_- N_- \{f_1(x) \cos(\omega_1 t) - f_2(x) \cos(\omega_2 t)\} \quad (30)$$

である。この主要項だけから計算した $\tilde{u}(t)$ を $\tilde{u}_{\text{main}}(t)$ として、その振舞いを図 12 と図 13 に示す。 $p = 0.999p_c$ では振動の振幅が定期的に増減を繰り返す「うなり」の現象がきれいに表れている。また、 $p = 0.999999p_c$ では振動の振幅は時間 t に比例して増大しているように見える。

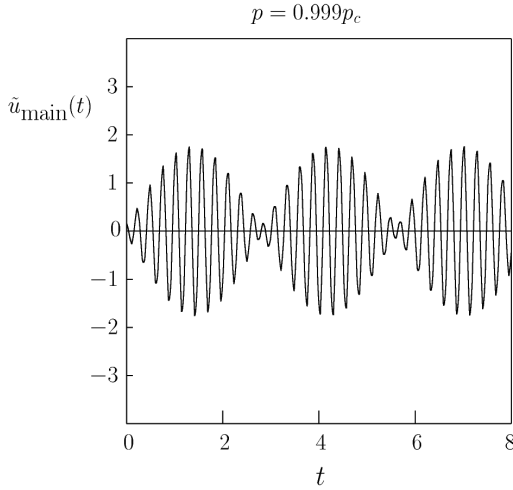


図 12 主要項 $\tilde{u}_{\text{main}}(t)$ の振舞い ($p = 0.999p_c$)

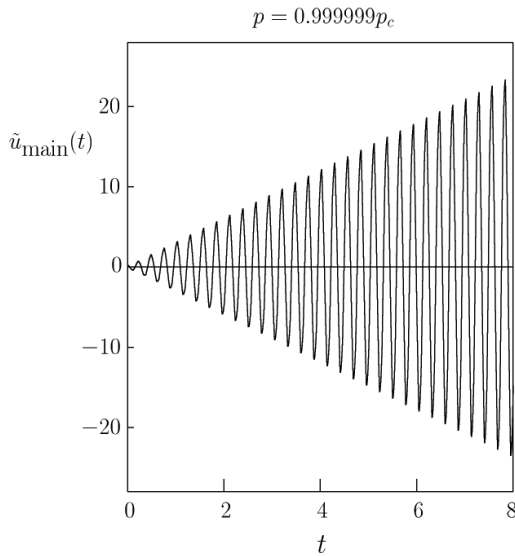


図 13 主要項 $\tilde{u}_{\text{main}}(t)$ の振舞い ($p = 0.999999p_c$)

この 2 つの現象が起こる理由は、 $u(x, t)$ の主要項 $u_{\text{main}}(t)$ (式 (30)) を以下のように書き換えることで理解できる。

$$\begin{aligned} & a_- N_- \{f_1(x) \cos(\omega_1 t) - f_2(x) \cos(\omega_2 t)\} \\ &= a_- N_- \left[\left\{ f_1(x) - f_2(x) \right\} \right. \\ & \quad \times \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ & \quad + \left\{ f_1(x) + f_2(x) \right\} \\ & \quad \left. \times \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \right] \quad (31) \end{aligned}$$

p が p_c に近づくと $(\omega_2 - \omega_1) \ll (\omega_2 + \omega_1)$ となるため、式 (31) の第 1 項と第 2 項はそれぞれ「うなり」の現象を示すが、図 11 のように p が p_c に近づくと $|f_1(x) + f_2(x)|$ の値は 2~4 の程度なのに対して $|f_1(x) - f_2(x)|$ の値は $\sqrt{p_c - p}$ に比例して小さくなるため、式 (31) の第 2 項が主要な項となる。 p が p_c に近づくと、 N_- が $\sqrt{p_c - p}$ に反比例して大きくなるため、主要項のうなりの振幅 $a_- N_- |f_1(x) + f_2(x)|$ も $\sqrt{p_c - p}$ に反比例して大きくなる。また、 $(\omega_2 - \omega_1)$ も $\sqrt{p_c - p}$ に比例して小さくなるので、うなりの周期 $\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ も $\sqrt{p_c - p}$ に反比例して長くなる。

p が p_c に十分近づくと、 $t = 0$ からの観測時間を、長くなったうなりの周期 $\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ に比べて数 10% 以内の時間範囲に限れば、

$$\begin{aligned} & a_- N_- \left\{ f_1(x) + f_2(x) \right\} \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ & \quad \cong a_- N_- \left\{ f_1(x) + f_2(x) \right\} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \quad (32) \end{aligned}$$

となり、振動の振幅は時間 t に単純に比例して増大するように見える。図 13 の $p = 0.999999p_c$ のときの振動の様子はまさにこの事が表れている。また、振動の振幅が t に比例して増大するときの比例係数 $a_- N_- \left\{ f_1(x) + f_2(x) \right\} (\omega_2 - \omega_1)/2$ は、 N_- が $\sqrt{p_c - p}$ に反比例し、 $(\omega_2 - \omega_1)$ が $\sqrt{p_c - p}$ に比例することから、 p の値にはほとんど依らない。

5. $p > p_c$ における固有波形と振動の解析

この節では $p > p_c$ の場合について考察する。この場合の最小の 2 つの固有振動数 ω は第 3 節で見たように複素数となるので、 $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$ とおく。また、変位 (10) の対応する固有波形 $f(x)$ の実部と虚部を

$$f(x) = g(x) + ih(x) \quad (g(x), h(x) : \text{real}) \quad (33)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 f(x) \cos(\omega t) &= [g(x) \cosh(\omega_{\text{Im}} t) \cos(\omega_{\text{Re}} t) \\
 &\quad + h(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \sin(\omega_{\text{Re}} t)] \\
 &\quad + i[h(x) \cosh(\omega_{\text{Im}} t) \cos(\omega_{\text{Re}} t) \\
 &\quad - g(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \sin(\omega_{\text{Re}} t)] \quad (34)
 \end{aligned}$$

より, 線形独立な実数解は式 (34) の実部と虚部からそれぞれとった以下の 2 つである.

$$f_1(x, t) = N_g \left\{ g(x) \cosh(\omega_{\text{Im}} t) \cos(\omega_{\text{Re}} t) + h(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \sin(\omega_{\text{Re}} t) \right\} \quad (35)$$

$$f_2(x, t) = N_h \left\{ h(x) \cosh(\omega_{\text{Im}} t) \cos(\omega_{\text{Re}} t) - g(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \sin(\omega_{\text{Re}} t) \right\} \quad (36)$$

ここで N_g と N_h はそれぞれ $g(x)$ と $h(x)$ の正規化定数である. $f_1(x, t)$ と $f_2(x, t)$ の $t = 0$ での初期値は, それぞれ $N_g g(x)$ と $N_h h(x)$ でともに正規化されている.

式 (35)(36) の $g(x)$ と $h(x)$ を実際に求めるためには, 連立方程式 (16) を満たすこととそれぞれが境界条件 (13) (14) を満たすことに加えて, 第 3 節で述べたように独立な解が 2 つあることを利用して $g(0)$ と $h(0)$ の比を任意に設定してやればよい. ここでは $h(0) = 0$ を課した. 得られた $N_g g(x)$ と $N_h h(x)$ を $p = 1.01p_c$ と $p = 1.001p_c$ のときについてそれぞれ図 14 に示す. p が p_c に近づくと固有波形 $N_g g(x)$ と $N_h h(x)$ は接近する様子が分かる.

独立な実数解として式 (35) と (36) を採用してもよいが,

$$\begin{aligned}
 f_-(x, t) &= g_-(x) \cosh(\omega_{\text{Im}} t) \cos(\omega_{\text{Re}} t) \\
 &\quad + h_-(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \sin(\omega_{\text{Re}} t) \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_+(x, t) &= g_+(x) \cosh(\omega_{\text{Im}} t) \cos(\omega_{\text{Re}} t) \\
 &\quad + h_+(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \sin(\omega_{\text{Re}} t) \quad (38)
 \end{aligned}$$

を採用するのが便利である. ここで, $g_-(x)$, $h_-(x)$, $g_+(x)$, $h_+(x)$ は以下のとおりである.

$$\begin{aligned}
 g_-(x) &= N_- \{ N_g g(x) - N_h h(x) \}, \\
 h_-(x) &= N_- \{ N_g h(x) + N_h g(x) \}, \\
 g_+(x) &= N_+ \{ N_g g(x) + N_h h(x) \}, \\
 h_+(x) &= N_+ \{ N_g h(x) - N_h g(x) \}
 \end{aligned} \quad (39)$$

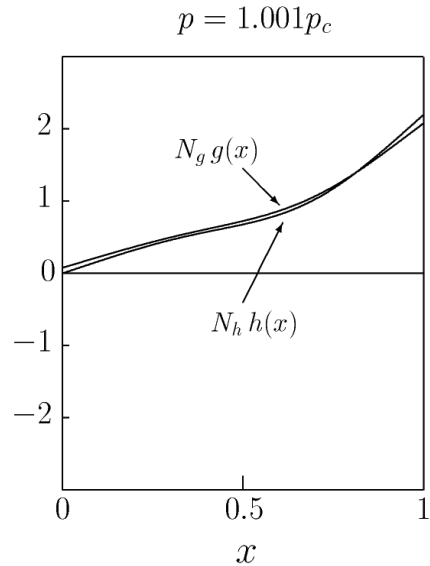
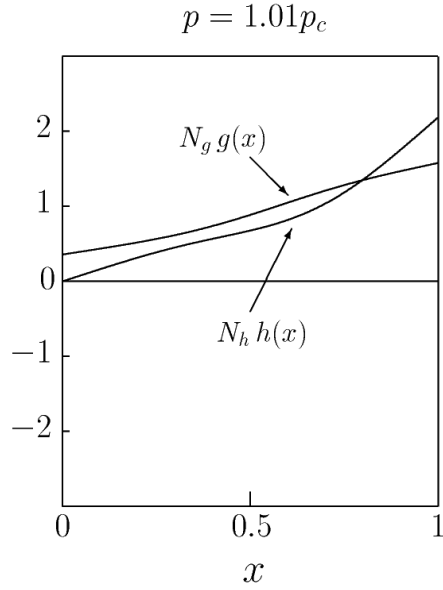


図 14 固有波形 $N_g g(x)$ と $N_h h(x)$

N_- と N_+ は, $g_-(x)$ と $g_+(x)$ を正規化させる因子である. 式 (39) の 4 つの波形のうち $g_-(x)$ と $g_+(x)$ はそれぞれ正規化されているだけでなく, 互いに直交する.

初期波形 $q(x)$ を以下のように展開する.

$$q(x) = b_- g_-(x) + b_+ g_+(x) + \sum_{n=3}^{\infty} b_n f_n(x) \quad (40)$$

ここで $f_n(x)$ ($n \geq 3$) は振動数の実数の固有値 ω_n に対応する固有波形で, それぞれ正規化されているとする.)

その後の時刻 t における変位は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= b_- \left[g_-(x) \cosh(\omega_{\text{Im}} t) \cos(\omega_{\text{Re}} t) \right. \\
 &\quad \left. + h_-(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \sin(\omega_{\text{Re}} t) \right] \\
 &\quad + b_+ \left[g_+(x) \cosh(\omega_{\text{Im}} t) \cos(\omega_{\text{Re}} t) \right. \\
 &\quad \left. + h_+(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \sin(\omega_{\text{Re}} t) \right] \\
 &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} b_n f_n(x) \cos(\omega_n t) \quad (41)
 \end{aligned}$$

ここで、波形 $g_-(x)$ と $g_+(x)$ は $p_c < p \lesssim 1.01p_c$ の範囲でほとんど変わらないので、 $p = 1.001p_c$ のときについて図 15 に示す。 $g_-(x)$ と $g_+(x)$ の波形はそれぞれノードが 0 または 1 なので、ノードが $(n+1)$ 個ある $f_n(x)$ ($n = 3, 4, \dots$) とは近似的に直交し、その結果、式 (40) の展開係数 b_- , b_+ , b_n ($n = 3, 4, \dots$) はそれぞれ近似的に

$$\begin{aligned}
 b_- &= \int_0^1 g_-(x) q(x) dx, & b_+ &= \int_0^1 g_+(x) q(x) dx, \\
 b_n &= \int_0^1 f_n(x) q(x) dx \quad (n = 3, 4, \dots) \quad (42)
 \end{aligned}$$

で与えられる。式 (42) により求めた b_- と b_+ の値を表 4 に示す。

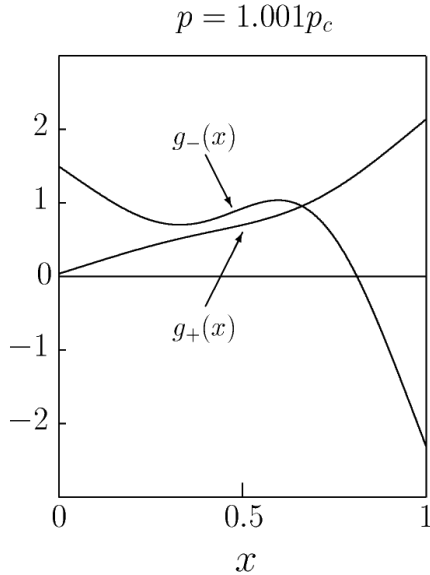


図 15 波形 $g_-(x)$, $g_+(x)$ ($p = 1.001p_c$)

表 4 展開係数 b_- および b_+

p	b_-	b_+
$1.001p_c$	-0.18	0.05
$1.0001p_c$	-0.18	0.05
$1.00001p_c$	-0.18	0.06
$1.000001p_c$	-0.18	0.06

$p = 1.001p_c$ と $p = 1.00001p_c$ における $h_-(x)$ と $h_+(x)$ の様子をそれぞれ図 16 と図 17 に示す。 $g_-(x)$ と $g_+(x)$ は正規化されているので 1 の程度の大きさであるが、 p が p_c に近づくとともに、 $h_-(x)$ は $\sqrt{p-p_c}$ に反比例して大きくなっている。 $h_+(x)$ も大きくなるが、せいぜい $h_-(x)$ の 1/100 程度の大きさである。

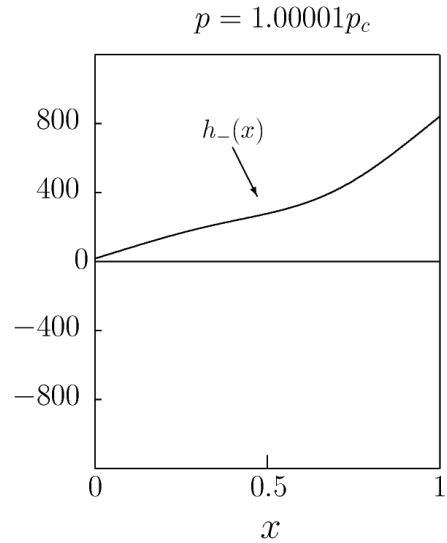
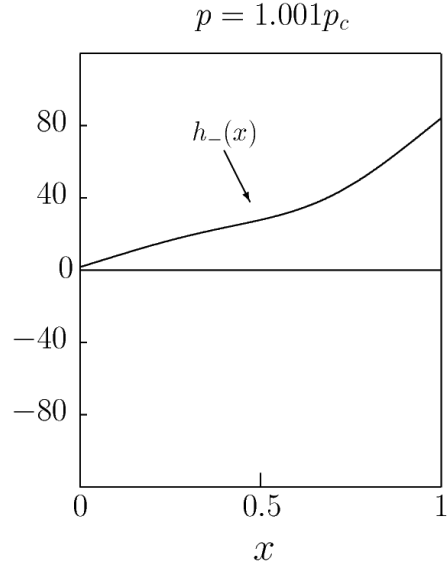


図 16 波形 $h_-(x)$

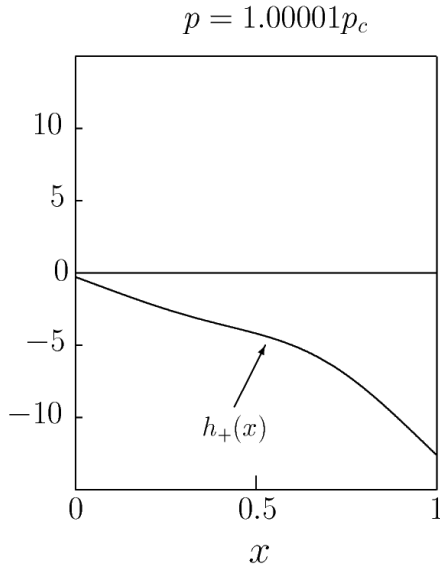
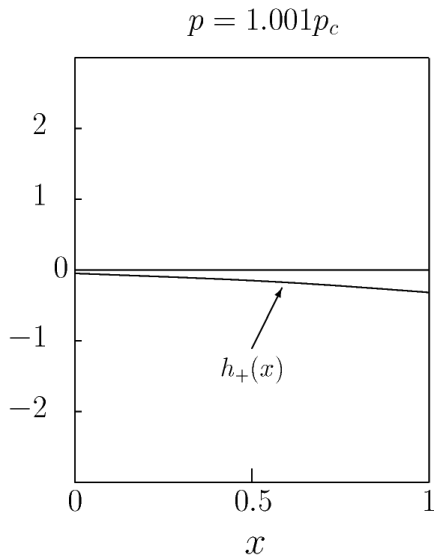


図 17 波形 $h_+(x)$

p が p_c に近づくとともに、 $h_-(x)$ が $\sqrt{p-p_c}$ に反比例して大きくなる理由は以下のようにして理解できる。 p が p_c に近づくとき波形 $h(x)$ は $g(x)$ に比べて $\sqrt{p-p_c}$ に比例して小さくなっているため、正規化因子 N_h は N_g に比べて $\sqrt{p-p_c}$ に比例して大きくなる。他方、 p が p_c に近づくとともに、正規化した波形 $N_g g(x)$ と $N_h h(x)$ は接近するが、 $p = 1.0001p_c$ 辺りからは差は縮まらなくなり、正規化因子 N_- は一定値に収束する。この結果、 h_- の第 2 項 $N_- N_h g(x) = N_- \cdot \frac{N_h}{N_g} \cdot N_g g(x)$ は、 p が p_c に近づくとともに $\sqrt{p-p_c}$ に反比例して大きくなっている (表 5 参照)。

表 5 正規化因子 N_- および $\frac{N_h}{N_g}$

p	N_-	$\frac{N_h}{N_g}$	$N_- \cdot \frac{N_h}{N_g}$
$1.01p_c$	4.12	0.3764	1.549
$1.001p_c$	19.48	1.190	23.19
$1.0001p_c$	30.99	3.770	116.8
$1.00001p_c$	32.93	11.93	392.8
$1.000001p_c$	33.14	37.71	1249

以上を総合すると、 $u(x,t)$ の主要項は式 (41) の中の以下の項である。

$$u(x,t)_{\text{main}} = b_- h_-(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \sin(\omega_{\text{Re}} t) \quad (43)$$

この項の対応する $\tilde{u}(t)$ の時間的な振舞いを $p = 1.00001p_c$, $p = 1.0001p_c$, $p = 1.001p_c$ についてそれぞれ図 18, 図 19, 図 20 に示す。

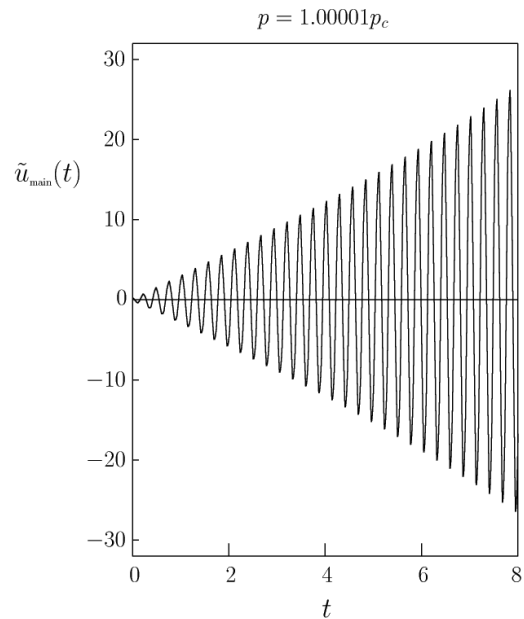


図 18 主要項 $\tilde{u}_{\text{main}}(t)$ の振舞い ($p = 1.00001p_c$)

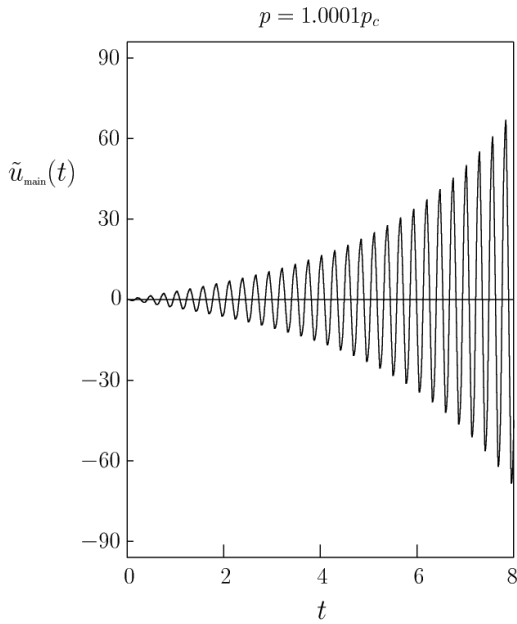


図 19 主要項 $\tilde{u}_{\text{main}}(t)$ の振舞い ($p = 1.0001p_c$)

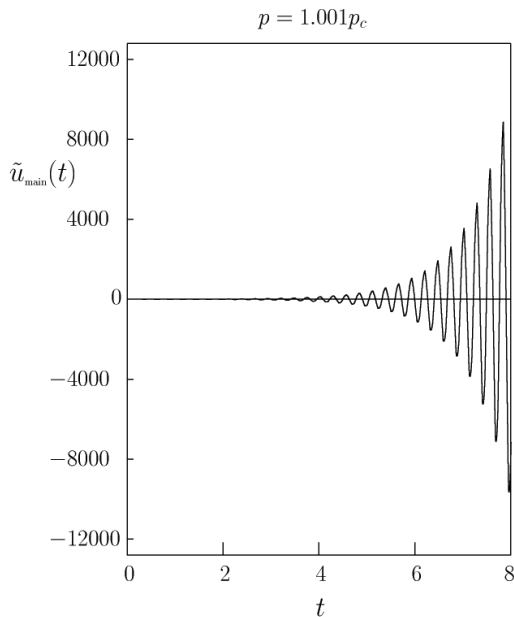


図 20 主要項 $\tilde{u}_{\text{main}}(t)$ の振舞い ($p = 1.001p_c$)

単振動 $\sin(\omega_{\text{Re}} t)$ の振幅 $b_{-}h_{-}(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t)$ は $\omega_{\text{Im}} t \gtrsim 1$ の時刻では指数関数的に増大する．初期に梁に横方向の「たわみ」があれば、それがいくら小さくても、時間の経過とともにたわみ振動の振幅は指数関数的に増大する．振動の 1 周期 $\frac{2\pi}{\omega_{\text{Re}}}$ あたりの振幅の増大率 Δ は

$$\Delta = \exp\left(\frac{2\pi \omega_{\text{Im}}}{\omega_{\text{Re}}}\right) \quad (44)$$

である．表 6 にこの振幅の増大率の値を示す．

表 6 振動 1 周期あたりの振幅の増大率 Δ

p	Δ
$1.00001p_c$	1.0154
$1.0001p_c$	1.0494
$1.001p_c$	1.165
$1.01p_c$	1.63
$1.1p_c$	5.10

これは $p = 1.0001p_c$ のときの図 19 と $p = 1.001p_c$ のときの図 20 に見て取れる．

他方、 p がもっと p_c に近いと、数 10 回程度の振動時間では $\omega_{\text{Im}} t \lesssim 1$ であり、振幅は

$$b_{-}h_{-}(x) \sinh(\omega_{\text{Im}} t) \simeq b_{-}h_{-}(x) \omega_{\text{Im}} t \quad (45)$$

となり、時刻とともに直線的に増加する．このとき、 ω_{Im} は $\sqrt{p-p_c}$ に比例して小さくなり b_{-} は $\sqrt{p-p_c}$ に反比例して増大するので、振幅 (45) の増加率は p に依らなくなる．実際、 $p = 1.0001p_c$ のときの図 19 と $p = 1.00001p_c$ のときの図 18 の $t \lesssim 3$ の時刻での振動の様子を比較すると、値も含めほぼ同じであることが見て取れる．

さらに指摘すべき点は、 $p = p_c$ の極めて近傍で、振動の様子を比較すると、 $p < p_c$ から $p > p_c$ にかけて精確に同じであることである．これは実際に $p = 0.999999p_c$ のときの図 13 と $p = 1.00001p_c$ のときの図 18 を比較すればよく分かる．

6. まとめと考察

本研究では、無重力空間に浮遊する一様縦長構造物の一端に長さの軸方向に一定の力（従動力）を加え続けたときの横方向のたわみ振動について、そのたわみ変位が構造物の長さに比べて十分小さいときの線形の運動方程式を導き、そのたわみ振動の固有振動数を求めた．その結果、固有振動数は、従動力を大きくするにつれて最低固有振動数と 2 番目の固有振動数が互いに接近し、従動力の特定の値（臨界値と呼ぶ）において、2 つの振動数が一致すること、さらに従動力をこの臨界値よりも大きくすると、2 つの固有振動数は今度は複素数値をとるようになることが分かった．その結果として、以下のことを示した．

1. 従動力が臨界値に下から近づくと、振動の振幅が大きく変動するうなりの現象が生じる．
2. そのうなりの振幅と周期は、従動力が臨界値に近づくほど、従動力とその臨界値の差の平方根に反比例して大きくなる．
3. 従動力がその臨界値に近づく極限では、うなりの振

幅と周期が無限に大きくなる結果として、梁の振動の振幅は時間に比例して直線的に増加する。

4. 従動力が臨界値を超えると、従動力とその臨界値の差の平方根に反比例するある時間までは振動の振幅が時間とともに直線的に増大する。
5. その時間を過ぎると、振動の振幅は時間とともに指数関数的に増大し続ける。
6. その増大率は従動力が臨界値から離れるほど従動力とその臨界値の差の平方根に比例して大きくなる。

この研究は無重力空間に浮遊する軸方向に一樣な自由梁について行ったが、ここでの結果は、梁に限らず軸方向に一樣な任意の縦長構造物についてもそのまま成立する。臨界従動力の値が無次元量で $p_c = 54.8$ ということは、次元を持った臨界従動力では $P_{0c} = p_c \frac{2EI}{L^2}$ ということである。第 1 節「はじめに」で述べた縦長構造の宇宙ステーションの場合で言えば、宇宙ステーションの長さ L を十分大きく取り、等価曲げ剛性 EI を十分小さくとれば(すなわち断面積を小さくとれば)、比較的小さい推力(従動力)のロケットエンジンで宇宙ステーションを長さ方向に加速しても、その推力は臨界値を超えるという事態が十分あり得る。臨界値を超える推力が働くと、最初に長さ軸と垂直な方向にほんのわずかなたわみがあっても、そのたわみは時間とともに必ず指数関数的に増大してしまう。その結果、宇宙ステーションに甚大な損傷をもたらす可能性がある。

最後に、今回解析した片方の端点に従動力を受けた浮遊自由梁の横方向変位についての線形運動方程式は、梁の横方向の変位が梁の長さに比べて十分小さいときに成り立つことを付け加えておく。初期変位が梁の長さに比べて十分小さいとして、従動力が臨界値に極めて近いと

き、あるいは臨界値を超えると、振動の振幅は初期値がいくら小さくとも時間とともに単調に増大する。時間の経過とともに梁の変位が梁の長さに比べて 10%程度を超えた時点から非線形効果が効き始め、梁の変位は上述の線形運動方程式に基づく振舞いからはずれてくる。片持ち梁に相当するトラス状の力学モデルの数値シミュレーション [2][4] によると、増加した梁の変位は梁の長さの 10%~数 10%程度を上限として折り返してくる。その後はカオス的な振幅の増減を繰り返す様子が観測される。逆に言えば、最初にわずかでも横方向のたわみがあれば、非線形効果が効き始めるまでは、すなわち梁の変位が梁の長さに比べて 10%~数 10%程度に至るまでは、振動の振幅は線形の運動方程式に従って必ず増大し続けるということである。

参考文献

- [1] Bolotin, V. V., "Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stabilities, Pergamon press (1963), 「ウラジミール・バシレヴィッチ・ボロティン弾性系の動的安定」近藤誠治・中田和夫 訳, コロナ社, 1972 年
- [2] 亀岡翔太, 有末宏明, "従動力を受けたトラス構造物の不安定振動の解析"大阪府立高専研究紀要, 第 41 巻, p.1~10, 2007 年 6 月
- [3] 有末宏明, "軸方向の従動力を受けた片持ち梁の不安定横振動"大阪府立大学高専研究紀要, 第 55 巻, p.1~12, 2022 年 1 月
- [4] 中谷 敬子, 杉山 吉彦, "従動力を受けるトラス構造物の振動特性の分子動力学シミュレーション", 日本材料学会第 11 回分子動力学シンポジウム proceedings, 2006 年 5 月 (長岡技術科学大学)