

軸方向の従動力を受けた片持ち梁の不安定横振動

有末宏明*

Unstable Transverse Oscillation of a Cantilever Beam under the Follower Force along the Longitudinal Axis

Hiroaki ARISUE*

要旨

片持ち梁の自由端に軸方向に大きさ一定の従動力を加え続けたときの現実的な初期条件の下での横方向の振動について、梁の線形の運動方程式の厳密解を用いて解析した。

従動力が小さいときは梁の振動の振幅は初期変位の大きさからわずかに揺らぐだけであるが、従動力がその臨界値に近づくにつれて、梁の振動にはうなりの現象が見られるようになる。このうなりの振幅と周期は従動力とその臨界値の差の平方根に反比例して大きくなる。従動力が小さい方から臨界値に近づく極限では、うなりの振幅と周期が無限に大きくなる結果、梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続ける現象として表れる。

また、従動力が臨界値を超えてかつ臨界値に近いときは、従動力とその臨界値の差の平方根に反比例するある時間までは、梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続け、その時間を超えると振動の振幅は時間とともに指数関数的に増加する。その指数関数的増加率は従動力とその臨界値の差の平方根に比例して大きくなる。従動力が大きい方から臨界値に近づく極限では、梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続け、その振舞いは従動力が小さい方から臨界値に近づく極限での振舞いと一致することも示した。

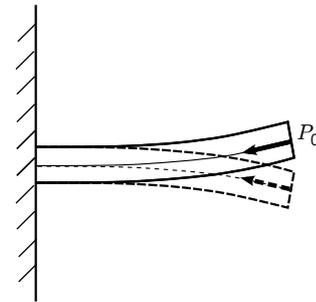
キーワード: 片持ち梁, 従動力, 運動方程式, 厳密解, 初期条件, うなり, 不安定振動

1. はじめに

片持ち梁の軸方向に常に一定の従動力を加え続けたときの梁の横方向の振動について、変位が梁の長さ比べて十分小さいときの梁の線形の運動方程式の境界条件を満たす厳密解が知られている [1][2]。その固有振動数は、従動力を大きくするにつれて最低振動数と2番目の振動数が互いに接近する。その結果として、うなりの現象が生じることが予想される。従動力の臨界値においては、両者が一致する。従動力をこの臨界値よりも大きくすると、この一致した2つの固有振動数は今度は1つの複素数となり、実数解の振動の振幅は時間とともに指数関数的に発散する。

実際に、片持ち梁を模擬するトラス状の簡単な力学模型に軸方向に従動力を加えた場合について微小な初期変位を与えて運動方程式の数値シミュレーション [2][3] を実施してみると、従動力を大きくしていくにつれて、確かにうなりの現象が生じ、うなりの振幅と周期が大き

図1 軸方向に従動力を受ける片持ち梁



なっていく事が観測される。従動力に応じたうなりの周期の変化から従動力の臨界値が予測できるが、従動力をその予測値にある程度以上近づけると、うなりの現象は振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続ける現象に遷移する。

また、このトラス状力学模型の数値シミュレーションで従動力を臨界値より十分大きくとると、振動の振幅は時間とともに指数関数的に増加する現象が確かに観測される。従動力の値を臨界値に向けて下げていくと、指数関数的増加率は従動力の値とともに減少し、その様子から指数関数的増加率が0となる従動力の臨界値を予測できる。この臨界値は前述のうなりの周期の変化から求め

2021年8月27日受理

* 総合工学システム学科 機械システムコース

(Dept. of Industrial Systems Engineering : Mechanical Systems Course)

た臨界値とよく一致する．ところが従動力を大きい方からこの臨界値にある程度以上近づけると，振動の振幅が指数関数的増加するという振舞いから，この場合も，振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続ける現象に遷移する．従動力の臨界値の近傍で振動の振幅が直線的に増加するその増加率は，臨界値を臨界値に小さい方から近づけた場合と大きい方から近づけた場合とで同じであった．

本研究では，軸方向に常に一定の従動力を受ける片持ち梁について，梁の線形の運動方程式の厳密解を用いて，現実的な初期変位（初期波形）を採用した場合に，以後の時刻での振動の振舞いを詳細に調べた．具体的には，梁の変位は一連の固有振動数に対応する固有振動の線形結合で与えられるが，その係数を初期波形から決定した．その結果，従動力を 0 から大きくしていくと，従動力が臨界値に近づくにつれてまずうなりの現象が表れ，臨界従動力を挟んでその近傍では，振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続ける象に変わり，さらに従動力を大きくすると振動の振幅が指数関数的に増加する現象となることを，そのメカニズムを含めて，明確に示すことができた．

2. 軸方向に従動力を受ける片持ち梁の運動方程式の固有振動数

一様材質の片持ち梁の軸方向に大きさ一定の従動力 P_0 (圧縮力のとき $P_0 > 0$) を自由端にかけ続けたとき，梁の横方向の変位 $u(x, t)$ が満たす運動方程式は，変位が十分小さいとき，梁の曲げ剛性率を EI ，梁の材質の密度を ρ ，梁の断面積を A として，以下のとおりである．

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

梁の長さを L とする． L と $\tau = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ をそれぞれ長ささと時間の単位にとるように， $t \rightarrow \tau t$ ， $x \rightarrow Lx$ の無次元化を行うと，

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2p' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

ただし， $P_0 = \frac{2EI}{L^2} p'$ とした．

この運動方程式の変数分離型の解

$$u(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \phi) \quad (3)$$

を求めると， $f(x)$ についての方程式は，

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} + 2p' \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \omega^2 f(x) = 0 \quad (4)$$

境界条件は $x = 0$ を固定端， $x = 1$ を自由端とすると，

$$f(0) = 0, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (5)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x=1} = 0 \quad (6)$$

ここで，

$$f(x) = \exp(sx) \quad (7)$$

とおくと，式 (4) より，

$$s^4 - 2p's^2 - \omega^2 = 0 \quad (8)$$

$$s = \pm \sqrt{\sqrt{p'^2 + \omega^2} + p'}, \quad s = \pm i \sqrt{\sqrt{p'^2 + \omega^2} - p'} \quad (9)$$

したがって，

$$\xi_+ = \sqrt{\sqrt{p'^2 + \omega^2} + p'}, \quad \xi_- = \sqrt{\sqrt{p'^2 + \omega^2} - p'} \quad (10)$$

とおくと， $f(x)$ の一般解は， $D_1 \sim D_4$ を任意定数として

$$f(x) = D_1 \cosh \xi_+ x + D_2 \cos \xi_- x + D_3 \sinh \xi_+ x + D_4 \sin \xi_- x \quad (11)$$

これが境界条件 (5) を満たすには， α を任意定数として

$$f(x) = D_1 \left\{ (\cosh \xi_+ x - \cos \xi_- x) + \alpha \left(\frac{1}{\xi_+} \sinh \xi_+ x - \frac{1}{\xi_-} \sin \xi_- x \right) \right\} \quad (12)$$

さらに境界条件 (6) を満たすには，

$$\begin{aligned} \alpha_1(p', \omega) &\equiv -\frac{\xi_+^2 \cosh \xi_+ + \xi_-^2 \cos \xi_-}{\xi_+ \sinh \xi_+ + \xi_- \sin \xi_-}, \\ \alpha_2(p', \omega) &\equiv -\frac{\xi_+^3 \sinh \xi_+ - \xi_-^3 \sin \xi_-}{\xi_+^2 \cosh \xi_+ + \xi_-^2 \cos \xi_-}, \\ \chi(p', \omega) &\equiv \alpha_1(p', \omega) - \alpha_2(p', \omega) \end{aligned} \quad (13)$$

として， ω は

$$\chi(p', \omega) = 0 \quad (14)$$

を満たす必要がある．

ここで後のために，式 (12) の α を式 (13) の $\alpha_1(p', \omega)$ で置き換えたものを以下のように定義しておく．(任意定数 D_1 は 1 とおいた．)

$$f(x, \omega) \equiv \left\{ (\cosh \xi_+ x - \cos \xi_- x) + \alpha_1(\omega) \left(\frac{1}{\xi_+} \sinh \xi_+ x - \frac{1}{\xi_-} \sin \xi_- x \right) \right\} \quad (15)$$

p' に対して，式 (14) を満たす ω を求めると，図 2，図 3 のように， $p'_c = 10.0254$ (臨界従動力) として， $p' \leq p'_c$ では，一連の実数値の振動数 (固有振動数) が存在する．固有振動数を小さい順に ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする．

p' が p'_c に近づくにつれて最も小さい振動数 ω_1 と 2 番目に小さい振動数 ω_2 が接近して、 $p' = p'_c$ で両者は一致する。 $p' = p'_c$ で一致した振動数の値を $\omega_c = 11.0156$ (臨界振動数) とする。

他方、 $p' > p'_c$ では、 $p' \leq p'_c$ での $n \geq 3$ に対応する ω_n に接続する実数値の固有振動数が存在するのに対して、 ω_1, ω_2 に接続する固有振動数 ω は図 2, 図 3 に示すとおり、複素数となる。この複素固有振動数を $\omega_{12} = \omega_R + i\omega_I$ と記す。

$p' = p'_c$ 近傍での固有振動数 ω の p' 依存性を調べておこう。 ω の固有値を決定する式 (14) において $\chi(p'_c, \omega_c) = 0$ を考慮すると、式 (14) の両辺の $p' = p'_c, \omega = \omega_c$ でのテーラー展開は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial p'}(p' - p'_c) + \frac{\partial \chi}{\partial \omega}(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial p'^2}(p' - p'_c)^2 \\ + \frac{\partial^2 \chi}{\partial p' \partial \omega}(p' - p'_c)(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2}(\omega - \omega_c)^2 = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

これが、 ω について $p' > p'_c$ でのみ複素数解をもつという条件から、 $\left. \frac{\partial \chi}{\partial \omega} \right|_{p'=p'_c, \omega=\omega_c} = 0$ の条件が付き、式 (16) すなわち式 (14) の $p' = p'_c$ 近傍での解は以下のとおりとなる。

$$\omega = \omega_c \pm k\sqrt{p'_c - p'} \quad (17)$$

ただし

$$k = 2 \frac{\partial \chi / \partial p'}{\partial^2 \chi / \partial \omega^2} \Big|_{p'=p'_c, \omega=\omega_c} \quad (18)$$

p'_c と ω_c の値を代入すると、 $k = 3.076$ である。

$\omega_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ に対応する波形 (式 (15)) を固有波形 (固有関数) と呼び、正規化 (規格化) したものを $f_n(x)$ と書くことにする。

$$f_n(x) = N_n f(x, \omega_n) \quad (19)$$

正規化定数 N_n は以下で定義される。

$$\int_0^1 \{f_n(x)\}^2 dx = 1 \quad (20)$$

(以降で登場する他の正規化定数も同様に定義したものとする。)

固有波形 $f_n(x)$ を、 $p' = 0$ と $p' = 0.9p'_c$ について、それぞれ図 4, 図 5 に示す。

図 2 固有振動数 ω の実部

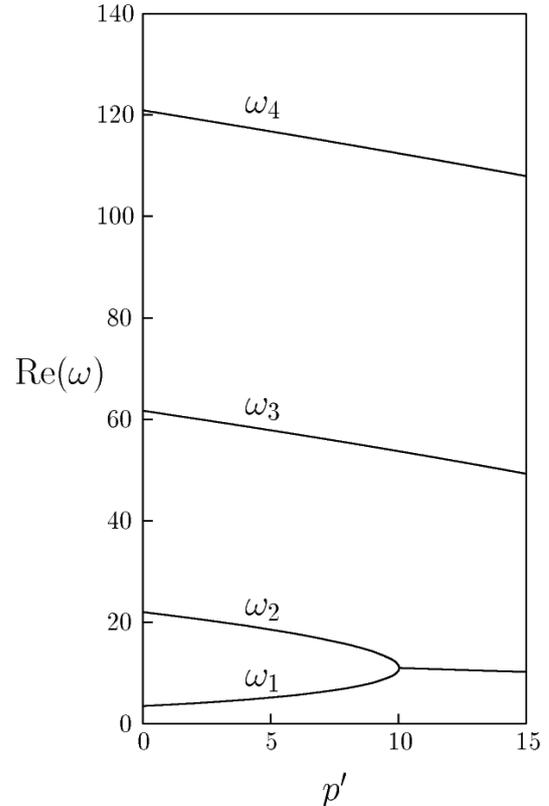


図 3 固有振動数 ω の虚部

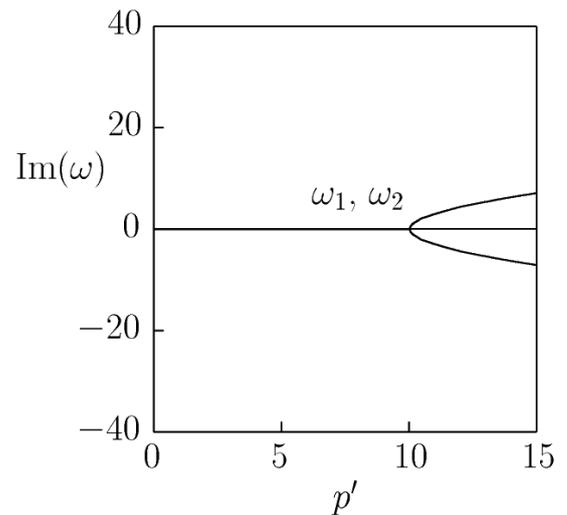


図 4 固有波形 ($p' = 0$)

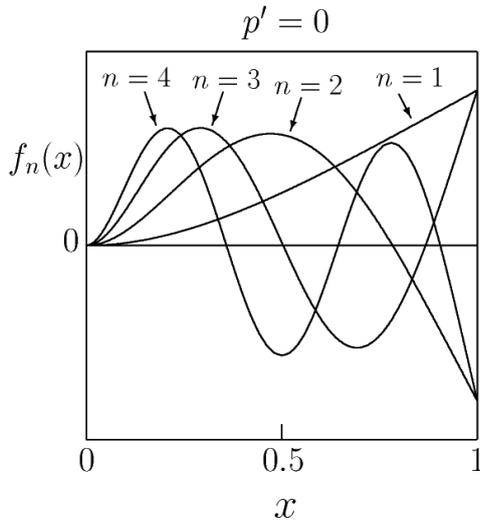
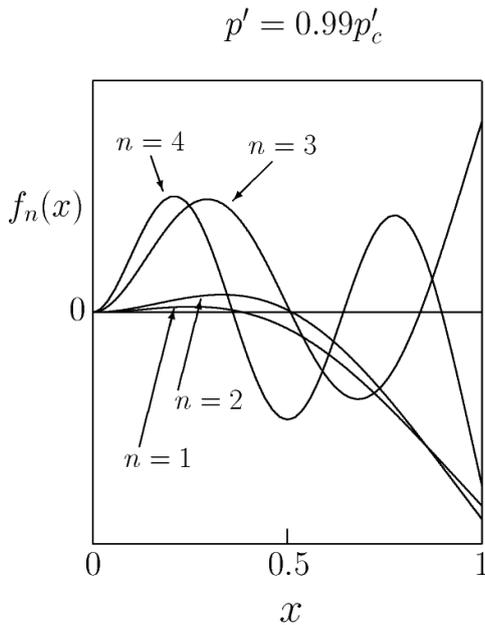


図 5 固有波形 ($p' = 0.99p'_c$)



$p' = 0$ では n 番目の振動の波形 $f_n(x)$ は $n-1$ 個のノード (ゼロ点) をもっているが, p' の値が大きくなるにしたがって, 最小振動数 ω_1 と 2 番目の振動数 ω_2 が接近する事に対応して, 固有波形 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ が互いに近づく. このとき, $f_2(x)$ のノード数は 1 のままで, $f_1(x)$ の方にノードが 1 つ生じる. 3 番目以降の振動数 ω_n の波形 $f_n(x)$ ($n \geq 3$) については, ノードの数は $n-1$ のままである.

次に, $p' > p'_c$ のときの複素固有振動数に対応する振

動モードに注目する. 本研究では, 式 (3) の初期位相は $\phi = 0$ の場合に限って考察する. この解は以下の初期条件を満たす.

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \tag{21}$$

$\omega = \omega_{12} = \omega_R + i\omega_I$ とおいた波形 (15) の実部と虚部を

$$f(x, \omega_{12}) = f_A(x) + if_B(x) \tag{22}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f(x, \omega_{12}) \cos(\omega_{12}t) &= [f_A(x) \cosh(\omega_I t) \cos(\omega_R t) \\ &\quad + f_B(x) \sinh(\omega_I t) \sin(\omega_R t)] \\ &\quad + i[f_B(x) \cosh(\omega_I t) \cos(\omega_R t) \\ &\quad - f_A(x) \sinh(\omega_I t) \sin(\omega_R t)] \end{aligned} \tag{23}$$

より, 独立な実数解は

$$\begin{aligned} \text{Re} [f(x, \omega_{12}) \cos(\omega_{12}t)] &= f_A(x) \cosh(\omega_I t) \cos(\omega_R t) \\ &\quad + f_B(x) \sinh(\omega_I t) \sin(\omega_R t), \\ \text{Im} [f(x, \omega_{12}) \cos(\omega_{12}t)] &= f_B(x) \cosh(\omega_I t) \cos(\omega_R t) \\ &\quad - f_A(x) \sinh(\omega_I t) \sin(\omega_R t) \end{aligned} \tag{24}$$

$\text{Re} [f(x, \omega_{12}) \cos(\omega_{12}t)]$ と $\text{Im} [f(x, \omega_{12}) \cos(\omega_{12}t)]$ の $t = 0$ での初期値は $f_A(x)$ と $f_B(x)$ である. 図 6 と図 7 にそれぞれ $p' = 1.01p'_c$ と $p' = 1.001p'_c$ のときの波形 $f_A(x)$ と $f_B(x)$ を示す (それぞれの p' について, 波形の相対的な大きさを示している).

図 6 固有波形 ($p' = 1.01p'_c$)

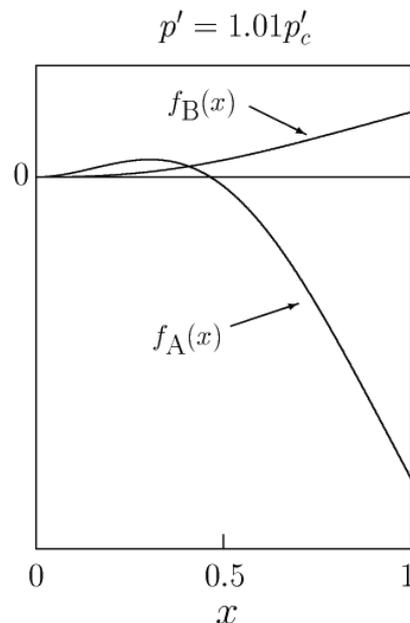
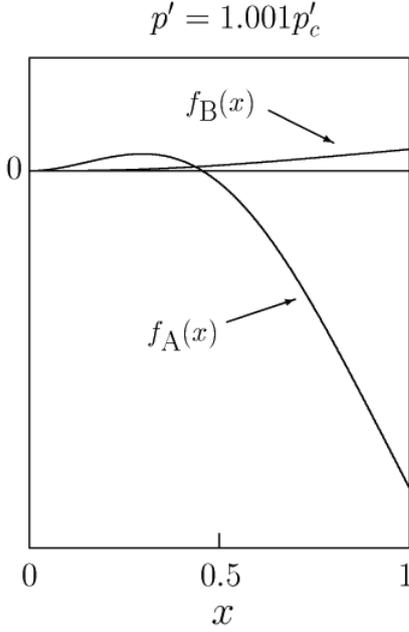


図7 固有波形 ($p' = 1.001p'_c$)


この波形の特徴は、 $f_B(x)$ がノードを持たないのに対して、 $f_A(x)$ はノードを1つ持つことである。そして、 $f_B(x)$ の最大値が $f_A(x)$ の最大値に比べて大きいことである。 $f_B(x)$ の最大値と $f_A(x)$ の最大値の比は p' の値が p'_c に近いほど ω_1 に反比例して大きくなる。

3. 固有波形の直交性と固有波形による初期波形の展開

この節ではまず、 $p' = 0$ の場合に限り、固有値 ω_n に対応する固有波形 $f_n(x)$ が直交関数系を成すことを示す。

固有値が ω_m と ω_n に対応する固有波形はそれぞれ以下の固有値方程式を満たす。

$$\frac{d^4 f_m(x)}{dx^4} + 2p' \frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} = \omega_m^2 f_m(x) \quad (25)$$

$$\frac{d^4 f_n(x)}{dx^4} + 2p' \frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} = \omega_n^2 f_n(x) \quad (26)$$

式 (25) に $f_n(x)$ 、式 (26) に $f_m(x)$ をそれぞれかけて積分し、差をとると

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{d^4 f_m(x)}{dx^4} f_n(x) - f_m(x) \frac{d^4 f_n(x)}{dx^4} \right) dx \\ & + 2p' \int_0^1 \left(\frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} f_n(x) - f_m(x) \frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} \right) dx \\ & = (\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx \quad (27) \end{aligned}$$

式 (27) は左辺で部分積分を複数回繰り返すことで以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \left[f_m(x) \frac{d^3 f_n(x)}{dx^3} - \frac{df_m(x)}{dx} \frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} \frac{df_n(x)}{dx} - \frac{d^3 f_m(x)}{dx^3} f_n(x) \right]_0^1 \\ & + 2p' \left[f_m(x) \frac{df_n(x)}{dx} - \frac{df_m(x)}{dx} f_n(x) \right]_0^1 \\ & = (\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx \quad (28) \end{aligned}$$

境界条件 (5)(6) により、式 (28) の左辺の第1項は0となるが、 p' に比例する第2項は $x = 1$ での値が0でない。したがって、 $p' = 0$ の場合に限り、 $m \neq n$ のとき、

$$\int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = 0,$$

すなわち、 $p' = 0$ の場合に限り、固有関数列 $\{f_n(x)\}$ は直交関数系を成す。 $p' \neq 0$ の場合は、固有関数列は直交関数系にはならない。

さて、初期条件を

$$u(x, 0) = g(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (29)$$

として、その後の梁の変位の時間的変化を考察する。

まず $p' < p'_c$ の場合は、 $g(x)$ を固有関数列 $\{f_n(x)\}$ で

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (30)$$

と展開することができれば、その後の梁の変位は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \cos(\omega_n t) \quad (31)$$

で与えられる。すなわち初期波形における各固有振動の成分を振幅とする単振動の重ね合わせである。

そのうち $p' = 0$ の場合には、展開係数 a_n は正規直交関数列 $\{f_n(x)\}$ を用いて以下のように得られる。

$$a_n = \int_0^1 f_n(x) g(x) dx \quad (32)$$

これに対して $0 < p' < p'_c$ の場合は、まず、Schmit の直交化法を用いて、固有関数列 $\{f_n(x)\}$ の線形結合により正規直交関数列 $\{h_n(x)\}$ を構成し、それを用いて $g(x)$ を展開することで、固有関数列 $\{f_n(x)\}$ による $g(x)$ の展開 (30) を得る事ができる。

次に $p' > p'_c$ の場合は、式 (22) の $f_A(x)$ 、 $f_B(x)$ を含む正規関数列 $\{N_B f_B(x), N_A f_A(x), f_3(x), f_4(x), \dots\}$ を

用いて、初期波形 $f(x)$ を以下のように展開する. (N_B, N_A はそれぞれ正規化係数である. また $f_n(x)$ ($n \geq 3$) についてもすべて正規化されているとする.)

$$g(x) = b_1 N_B f_B(x) + b_2 N_A f_A(x) + \sum_{n=3}^{\infty} b_n f_n(x) \quad (33)$$

ここで $f_B(x)$ を第 1 項, $f_A(x)$ を第 2 項にしたのは, 前節図 6, 図 7 で見たように $f_B(x)$ がノードを 1 つも持たないのに対して, $f_A(x)$ がノードを 1 つ持つからである. すると, その後の梁の変位は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= b_1 N_B \left[f_B(x) \cosh(\omega_I t) \cos(\omega_R t) \right. \\ &\quad \left. - f_A(x) \sinh(\omega_I t) \sin(\omega_R t) \right] \\ &\quad + b_2 N_A \left[f_A(x) \cosh(\omega_I t) \cos(\omega_R t) \right. \\ &\quad \left. + f_B(x) \sinh(\omega_I t) \sin(\omega_R t) \right] \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} b_n f_n(x) \cos(\omega_n t) \end{aligned} \quad (34)$$

係数 b_1 と b_2 に比例する最初の 2 項はともに $\omega_I t \gtrsim 1$ の時刻では振動の振幅が指数関数的に増大する. その指数関数的増加率は ω_I である.

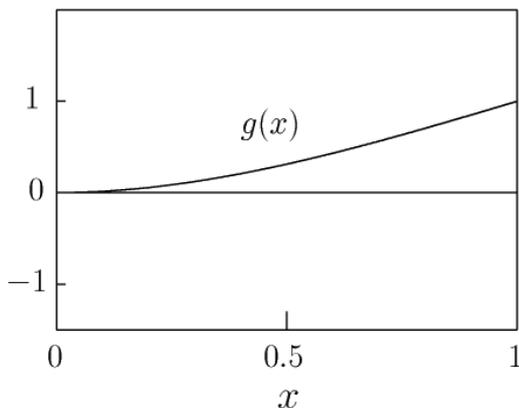
4. 現実的な初期条件のもとでの解の振舞い

現実的な初期条件として本研究では, 片持ち梁の自由端 ($x = 1$) に横方向に一定の力を加えたときの「たわみ曲線」を採用する (図 8).

$$g(x) = (3x^2 - x^3)/2 \quad (35)$$

実際の初期波形には任意定数を右辺全体にかけることができるが, ここでは便宜的に $g(x)|_{x=1} = 1$ となるようにとった.

図 8 初期波形 (たわみ曲線) ($p' = 0$)



以下 p' の値毎に, 梁の自由端の変位 $u(x, t)|_{x=1}$ の時間的な振舞いを図 9~図 16 に示す. $p' < p'_c$ については式 (30) の展開係数 a_n を, $p' > p'_c$ については式 (33) の展開係数 b_n をそれぞれ前節に述べた手順で求め, 梁の変位の時間的な振舞いはそれぞれ式 (31) または式 (34) により求めた.

$p' = 0$ の場合には, 展開係数 a_n は表 2 のとおり, $|a_1| \gg |a_2|, |a_3|, \dots$ となっており, これに対応して振動の様子は図 9 のように $n = 1$ の最低振動数の単振動が主要部分を占めていて, そこに $n = 2$ を主とする高い振動数の成分による微少な揺らぎが加わっている.

$0 < p' < p'_c$ の場合は, p' が大きくなると, 表 2 のとおり展開係数 a_2 が徐々に大きくなり, $p' = 0.9p'_c$ では無視できない大きさとなる. 図 10 のように $n = 1$ の最低振動数の単振動を基本にしながらか主として $n = 2$ による振幅の揺らぎが目立ってきている.

これが, $p' = 0.99p'_c$ では表 2 のとおり a_2 が a_1 に匹敵する大きさとなり, また表 1 のとおり $n = 1$ と $n = 2$ の振動数が互いにかなり近づいて, 対応する固有波形 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ も近づいている. その結果として振動の様子には図 11 のようにうなりの現象が現れている.

従動力がさらに臨界値 p'_c に近づくにつれて表 1 と表 2 のように振動数 ω_1 と ω_2 , 固有波形 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ (図示は省略している) がそれぞれ互いに近づき, 係数 a_1 と a_2 も互いに近づいている. その結果として図 12, 図 13, 図 14 のように, うなりの現象はより明確になっている. 従動力 p' が臨界値 p'_c に近づくにつれてうなりの周期と振幅はともに ω_2 と ω_1 の差に反比例して増大している.

表 1 固有振動数 ($p' < p'_c$)

p'	ω_1	ω_2	$\omega_2 - \omega_1$
0	3.52	22.03	18.51
$0.99p'_c$	10.06	12.01	1.95
$0.999p'_c$	10.71	11.32	0.61
$0.9999p'_c$	10.918	11.113	0.195
$0.99999p'_c$	10.985	11.046	0.061

表 2 初期波形の展開係数 ($p' < p'_c$)

p'	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0.4853	-0.0124	0.0016	-0.0004
$0.9p'_c$	-0.6260	0.1687	0.0062	-0.003
$0.99p'_c$	-1.3485	0.8942	0.0068	0.0004
$0.999p'_c$	-3.726	3.276	0.0069	0.0004
$0.9999p'_c$	-11.29	10.84	0.0069	0.0004
$0.99999p'_c$	-35.32	34.87	0.0069	0.0004

図 9 振動の様子 ($p' = 0$)

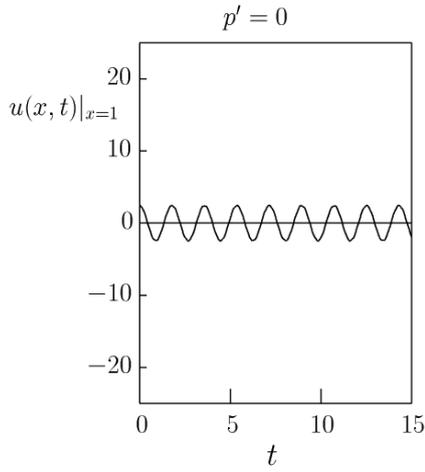


図 12 振動の様子 ($p' = 0.999p'_c$)

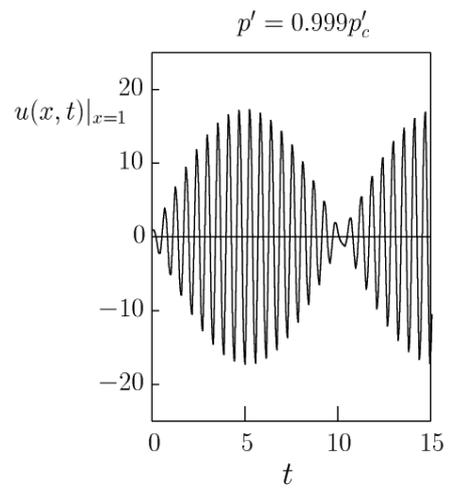


図 10 振動の様子 ($p' = 0.9p'_c$)

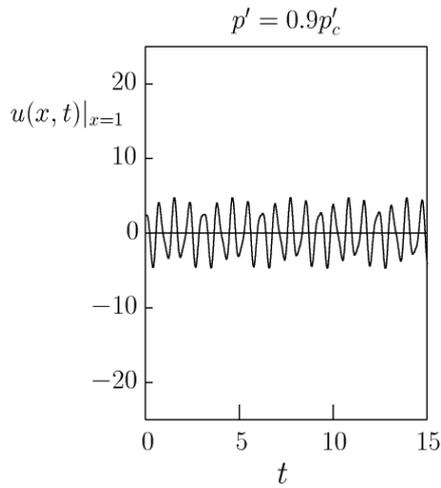


図 13 振動の様子 ($p' = 0.9999p'_c$)

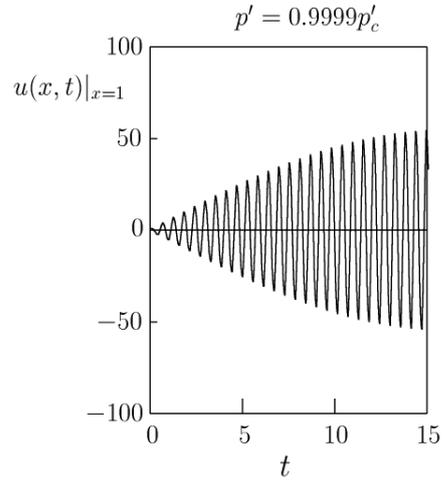


図 11 振動の様子 ($p' = 0.99p'_c$)

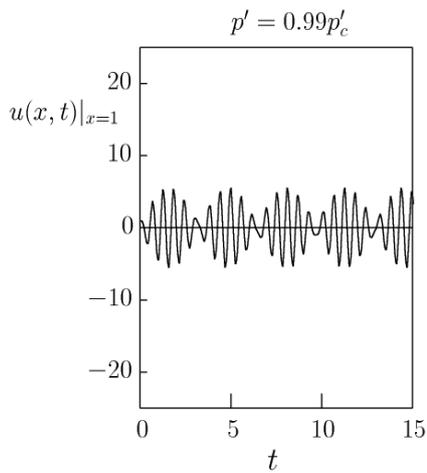
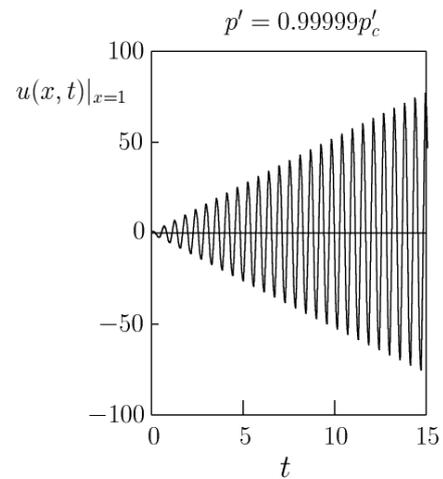


図 14 振動の様子 ($p' = 0.99999p'_c$)



$p' > p'_c$ の場合は、最低固有振動数 ω が複素数になることに対応して前節の式 (34) のように梁の振動の振幅は時間の経過とともに指数関数的に増大する。指数関数的な増加率は複素固有振動数 ω の虚数部 ω_I に等しいが、その値は表 3 のように p' が大きくなるほど大きくなる。(p' が p'_c の近傍では式 (17) のとおり $\sqrt{p' - p'_c}$ に比例して大きくなる。)

実際、 $p' = 1.001p'_c$ では固有振動数の実数部と虚数部は $\omega_R = 11.01$, $\omega_I = 0.308$ となり、図 16 のように $\omega_I t \sim 1$ すなわち $t \sim 3$ 辺り以降の時刻で振動の振幅の指数関数的増大が顕著に見られる。

他方、 $p' = 1.00001p'_c$ では $\omega_R = 11.02$, $\omega_I = 0.0308$ であり、振動の振幅の指数関数的増大が顕著に見られるのは $t \sim 30$ の時刻以降のはずだと思われるが、実際には図 15 のように振動の振幅は最初の時刻から直線的に増大している。

表 3 固有振動数 ($p' > p'_c$)

p'	ω_R	ω_I
$1.00001p'_c$	11.02	0.0308
$1.0001p'_c$	11.02	0.0974
$1.001p'_c$	11.01	0.308
$1.01p'_c$	11.01	0.974

図 15 振動の様子 ($p' = 1.00001p'_c$)

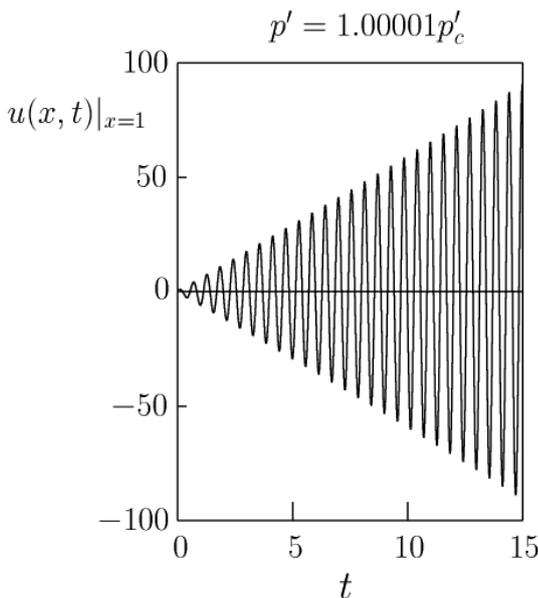
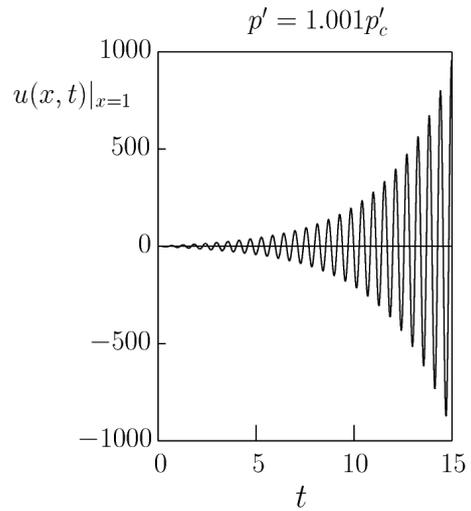


図 16 振動の様子 ($p' = 1.001p'_c$)



この節の以降では、 $p' > p'_c$ で、かつ p' が p'_c に極めて近いときは、このように振動の振幅が最初の時刻から直線的に増大する理由を述べる。

まず、表 3 のように p' が p'_c に近いほど ω_I は $\sqrt{p' - p'_c}$ に比例して小さくなる (式 (17) 参照)。式 (34) の展開係数 b_n については表 4 のように、 b_2 は b_1 の $1/6$ 程度であり、また $b_n (n \geq 3)$ は b_1, b_2 に比べてはるかに小さい。さらに、式 (34) の b_1 に比例する第 1 項と b_2 に比例する第 2 項について、 $f_B(x)$ と $f_A(x)$ の大きさを比べると、2 節で説明したように (図 6, 図 7 参照)、 p' が p'_c に近いほど $f_A(x)$ の方が $f_B(x)$ より大きくなるので、第 1 項と第 2 項を合わせた中では振動の振幅が $b_1 N_B f_A(x) \sinh(\omega_I t)$ の項が主要な項である。(注: $N_B f_B(x)$ と $N_A f_A(x)$ はそれぞれ正規化されているので 1 の程度の大きさである。)

表 4 初期波形の展開係数 ($p' > p'_c$)

p'	b_1	b_2	b_3	b_4
$1.00001p'_c$	0.577	0.098	0.0069	0.0004
$1.0001p'_c$	0.577	0.098	0.0069	0.0004
$1.001p'_c$	0.576	0.097	0.0069	0.0004
$1.01p'_c$	0.569	0.090	0.0070	0.0004

実際、表5のように、 p' が p'_c の近傍では $b_1 N_B f_A(x)$ が他の振幅より圧倒的に大きく、その値は ω_1 に反比例して大きくなっている。

表5 変位の主要項の $x = 1$ での振幅 ($p' > p'_c$)

p'	$b_1 N_B f_B(x)$	$b_1 N_B f_A(x)$	$b_2 N_A f_A(x)$	$b_2 N_A f_B(x)$
$1.00001 p'_c$	1.23	189.3	-0.25	0.002
$1.0001 p'_c$	1.23	57.3	-0.25	0.005
$1.001 p'_c$	1.23	19.0	-0.25	0.019
$1.01 p'_c$	1.22	5.6	-0.23	0.050

そして、 $0 < t \lesssim \frac{1}{\omega_1}$ の時刻では

$$b_1 N_B f_A(x) \sinh(\omega_1 t) \simeq b_1 N_B f_A(x) \omega_1 t \quad (36)$$

と、振動の振幅が時刻 t に比例して増大する。その時間 $\frac{1}{\omega_1}$ は $p' \rightarrow p'_c$ の極限では無限に長くなる。(注： $p' \rightarrow p'_c$ の極限で $f_A(x)$ は ω_1 にほぼ反比例して大きくなるので、 ω_1 の減少と合わさって式 (36) の右辺の係数 $b_1 N_B f_A(x) \omega_1$ は p' が変化してもほぼ一定である。

5. 臨界従動力近傍での解の振舞い

この節では、臨界従動力近傍での解の振舞いを調べる。とくに $p' < p'_c$ の側から $p' \rightarrow p'_c$ の極限をとったときと、 $p' > p'_c$ の側から $p' \rightarrow p'_c$ の極限をとったときとで、現実的な初期波形を採った梁の変位の時間的な振舞いが一致することを示す。

まず $p' = p'_c$ 近傍で $p' < p'_c$ について調べる。

p' が p'_c に近づくとき、2つの固有値 ω_1 と ω_2 は互いに近づくので、対応する固有波形 $f(x, \omega_1)$ と $f(x, \omega_2)$ も互いに近づく。そこで、以下の正規化された波形関数を導入する。

$$\begin{aligned} f_1^*(x) &= N_1^* \{f(x, \omega_2) - f(x, \omega_1)\} \\ f_2^*(x) &= N_2^* \{f(x, \omega_2) + f(x, \omega_1)\} \end{aligned} \quad (37)$$

N_1^* , N_2^* は正規化定数である。例として図17と図18に $p' = 0.99$ と $p' = 0.9999$ での $f_1^*(x)$ と $f_2^*(x)$ を示す。 $f_1^*(x)$ はノードを持たないだけでなく、 $f_1^*(x)$ と $f_1^{*''}(x)$ も符号を変えないという意味で、現実的な初期波形の例として採用した「たわみ曲線」(35) (図8) と波形が類似している。他方、 $f_2^*(x)$ はノードを1つ持つ。

図17 波形関数 ($p' = 0.99 p'_c$)

$$p' = 0.9900 p'_c$$

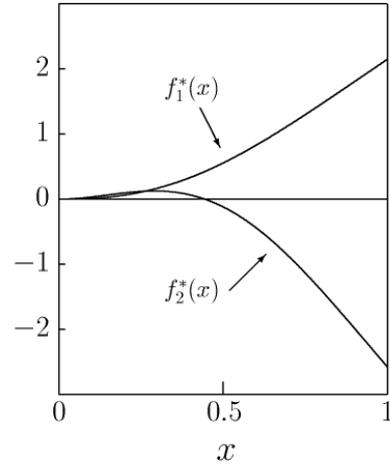
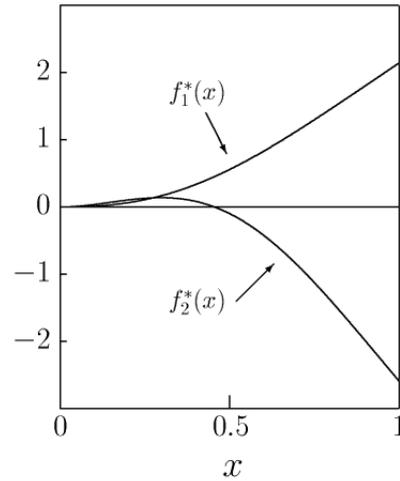


図18 波形関数 ($p' = 0.9999 p'_c$)

$$p' = 0.9999 p'_c$$



そこで、初期波形 $g(x)$ を式 (30) のように固有関数列 $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ で展開する代わりに、以下のように関数列 $\{f_1^*(x), f_2^*(x), f_3(x), \dots\}$ で展開した方が、 p'_c 近傍での解の時間的な振舞いをより良く理解することができる。

$$g(x) = a_1^* f_1^*(x) + a_2^* f_2^*(x) + \sum_{n=3}^{\infty} a_n^* f_n(x) \quad (38)$$

$p' = p'_c$ 近傍では表 6 のように $|a_1^*| \gg |a_2^*|, |a_3^*|, |a_4^*|, \dots$ となっており. $f_1^*(x)$ が初期波形 $g(x)$ の主要な成分である.

表 6 初期波形の展開係数 a_n^* ($p' < p'_c$)

p'	a_1^*	a_2^*	a_3^*	a_4^*
$0.99p'_c$	0.5864	0.1073	0.0068	0.0004
$0.9999p'_c$	0.5774	0.0983	0.0069	0.0004

初期波形の成分分解 (38) の主要項であるこの第 1 項の時刻 t における波形は以下のとおりである.

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &\cong \\
 &= a_1^* N_1^* [f(x, \omega_2) \cos(\omega_2 t) - f(x, \omega_1) \cos(\omega_1 t)] \\
 &= a_1^* N_1^* \left[\{f(x, \omega_2) - f(x, \omega_1)\} \frac{\cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_1 t)}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \{f(x, \omega_2) + f(x, \omega_1)\} \frac{\cos(\omega_2 t) - \cos(\omega_1 t)}{2} \right] \\
 &= a_1^* N_1^* \left[\{f(x, \omega_2) - f(x, \omega_1)\} \right. \\
 &\quad \times \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\
 &\quad - \{f(x, \omega_2) + f(x, \omega_1)\} \\
 &\quad \left. \times \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \right] \tag{39}
 \end{aligned}$$

式 (39) の最終式の第 1 項と第 2 項はともに「うなり」の式である. 式 (39) の $t = 0$ での波形は第 1 項のうなりの振幅 $a_1^* N_1^* [f(x, \omega_2) - f(x, \omega_1)] = a_1^* f_1^*(x)$ であるが, これは上述のとおり梁の初期波形 $g(x)$ にほぼ等しい. これに対して, p' が p'_c に近づくとき, $f(x, \omega_2)$ と $f(x, \omega_1)$ が互いに接近する結果, 第 2 項のうなりの振幅 $a_1^* N_1^* [f(x, \omega_2) + f(x, \omega_1)]$ は, 第 1 項の振幅に比べて (したがって初期波形 $g(x)$ に比べて), $\omega_2 - \omega_1$ に反比例して増大するのである. (p' が p'_c に近づくときの $f(x, \omega_2) - f(x, \omega_1)$ と $f(x, \omega_2) + f(x, \omega_1)$ の相対的な大きさの変化を図 19 と図 20 に示しておく.)

図 19 $f(x, \omega_2) - f(x, \omega_1)$ と $f(x, \omega_2) + f(x, \omega_1)$ の比較 ($p' = 0.99p'_c$)

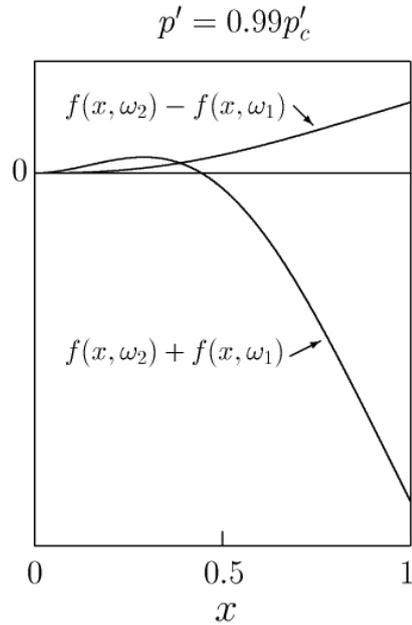
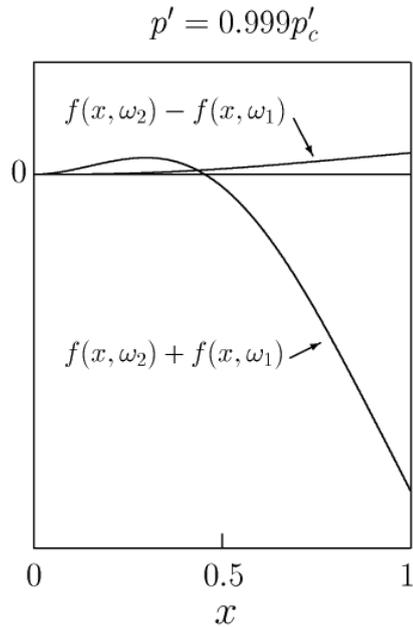


図 20 $f(x, \omega_2) - f(x, \omega_1)$ と $f(x, \omega_2) + f(x, \omega_1)$ の比較 ($p' = 0.9999p'_c$)



p' が p'_c に近づく極限で、式 (17) に従って $\omega_1 = \omega_c - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega_c + \Delta\omega$ において、式 (39) の $\Delta\omega$ について 1 次までの展開を示しておく。

$$\begin{aligned} u(x, t) &\cong \\ &= a_1^* N_1^* [f(x, \omega_2) \cos(\omega_2 t) - f(x, \omega_1) \cos(\omega_1 t)] \\ &= 2a_1^* N_1^* \\ &\quad \times \left\{ \Delta\omega \frac{\partial f(x, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_c} \cos(\Delta\omega t) \cos(\omega_c t) \right. \\ &\quad \left. - f(x, \omega_c) \sin(\Delta\omega t) \sin(\omega_c t) \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

次に $p' = p'_c$ 近傍のうち $p' > p'_c$ について調べる。複素固有振動数を $\omega = \omega_c + i\Delta\omega$ とおくと、

$$f(x, \omega) = f(x, \omega_c) + i\Delta\omega \frac{\partial f(x, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_c} \quad (41)$$

より、式 (22) に従って、 $f_A(x) = f(x, \omega_c)$, $f_B(x) = \Delta\omega \frac{\partial f(x, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_c}$, これを、式 (34) において $p' = p'_c$ 近傍での主要項である第 1 項に代入して、 $\Delta\omega$ について 1 次まで展開すると、以下のとおりとなる。

$$\begin{aligned} u(x, t) &\cong \\ &= b_1 N_B \left\{ \Delta\omega \frac{\partial f(x, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_c} \cosh(\Delta\omega t) \cos(\omega_c t) \right. \\ &\quad \left. - f(x, \omega_c) \sinh(\Delta\omega t) \sin(\omega_c t) \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

解 (40) ($p' < p'_c$) と解 (42) ($p' > p'_c$) を比較すると、 $t \ll \frac{1}{\Delta\omega}$ の時刻では、互いに極めて近く、 $\Delta\omega \rightarrow 0$ の極限で、正規化定数について $2N_1^* = N_B$, さらにそれに基づく展開係数について $a_1^* = b_1$ の関係があるので、両者は正確に一致する。

これらの臨界従動力近傍での解 (40) と解 (42) に共通の重要な特徴は、 $t = 0$ では第 2 項が 0 であるが、 $\Delta\omega$ が十分小さいとき、

$$t = \frac{\partial f(x, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_c} / f(x, \omega_c) = \frac{0.187}{8.4} = 0.22 \quad (43)$$

の時刻には第 2 項が第 1 項とほぼ同じ振幅になり、最初の振動の周期に相当する時刻 $t = \frac{2\pi}{\omega_c} = 0.57$ には第 2 項の振幅が第 1 項の振幅の $\frac{0.57}{0.22} = 2.6$ 倍になる。以降 $t \sim \frac{1}{2\Delta\omega}$ 程度の時刻までは t にほぼ比例して振動の振幅が増大する。

6. まとめと考察

片持ち梁の自由端に梁の軸方向に大きさ一定の従動力を加え続けたときの現実的な初期条件の下での横方向の振動について、梁の線形の運動方程式の厳密解を用いて解析した。

従動力が小さいときには梁の振動の振幅が初期変位の大きさからわずかに揺らぐだけであるが、従動力 p' が臨界値 p'_c に近づくにつれて、梁の振動にはうなりの現象が見られるようになる。このうなりの振幅と周期は $\sqrt{p'_c - p'}$ に反比例して大きくなる。従動力が小さい方から臨界値に近づく極限では、うなりの振幅と周期が無限に大きくなる結果、梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続ける現象として表れる。1 回の振動毎の振幅の増加は初期変位の約 2.6 倍ずつである。

他方、従動力が臨界値を超えてかつ臨界値に近いときは、 $\sqrt{p' - p'_c}$ の逆数に比例するある時間までは、梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続け、その時間を超えると振動の振幅は時間とともに指数関数的に増加する。その指数関数的増加率は $\sqrt{p' - p'_c}$ に比例して大きくなる。

従動力が大きい方から臨界値に近づく極限では、梁の振動の振幅が時間に比例して直線的に増加し続け、その振舞いは従動力が小さい方から臨界値に近づく極限での振舞いと完全に一致する。

今回は初期波形として片持ち梁の自由端 ($x = 1$) に横方向に一定の力を加えたときに生じる「たわみ曲線」を採用して解析した。これ以外に初期波形として $g(x) = x^2$ という波形を採用した解析も行ったが、従動力の大きさに応じた梁の変位の振舞いの変化に関する上述の結論は変わらない。一般的に初期波形 $g(x)$ について少なくとも、傾き $g'(x)$ と曲率 $g''(x)$ の符号がそれぞれ梁の固定端から自由端までのどの位置でも符号を変えない (したがって波形がノードを持たない) 場合には、4 節と 5 節の考察から、梁の変位の振舞いについての上述の結論は変わらないと考えられる。

最後に、今回解析した従動力を受けた片持ち梁の横方向の変位についての線形運動方程式は、梁の横方向の変位が梁の長さに比べて十分小さいときにのみ成り立つことを付け加えておく。初期変位が梁の長さに比べて十分小さいとして、従動力が臨界値に近いとき、あるいは臨界値を超えると、振動の振幅は時間とともに初期値から増大する。時間の経過とともに梁の変位が梁の長さに比べて 10% 程度を超えた時点から非線形効果が効き始め、梁の変位は上述の線形運動方程式の厳密解に基づく振舞いからはずれてくる。トラス状の力学模型の数値シミュレーションによると、増加した梁の変位は梁の長さ

の 10%～数 10%程度を上限として折り返してくる。その後はカオス的な振幅の増減を繰り返す様子が観測される。

参考文献

- [1] Bolotin, V. V., “Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stabilities, Pergamon press (1963), 「ウラジミール・バシレヴィッチ・ボロティン弾性系の動的安定」近藤誠治・中田和夫 訳, コロナ社, 1972 年
- [2] 亀岡翔太, 有末宏明, “従動力を受けたトラス構造物の不安定振動の解析“大阪府立高専研究紀要, 第 41 巻, p.1～10, 2007 年 6 月
- [3] 中谷 敬子, 杉山 吉彦, “従動力を受けるトラス構造物の振動特性の分子動力学シミュレーション“, 日本材料学会第 11 回分子動力学シンポジウム proceedings, 2006 年 5 月 (長岡技術科学大学)